(Math. U.)
301
w

Bei
Gebhard & Körber,
Buchhändler
in FRANKFURT a. M. Lit. J. No. 182, Buchgasse
bei welchen außer diesem alle älteren u. neueren Erscheinungen deutscher u. fremder Literatur, Schul-Kinder-Schriften u. Andachtsbücher sauber gebunden, Landkarten, Atlasse, Vorschriften, Zeichnenbücher, Gesellschaftsspiele und ähnliche Artikel zu billigen Preisen zu haben sind.

Dun

Thilo

math. w.
301 w

NK
IUS

Lehrbuch

der

reinen Elementar-Mathematik

von

Dr. Ludwig Thilo,

Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Frankfurt am Mayn.

Mit 79 im Text eingedruckten geometrischen Figuren.

Frankfurt a. M. 1820.

Gedruckt und verlegt bey Heinrich Ludwig Brönner.

BAYERISCHE
STAATS
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

GESCHENK
FRESENIUS

Vorrede.

Vor drittehalb Jahren ließ ich, als Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau, ein gedrängtes Lehrbuch der Geometrie drucken, das ich absichtlich nicht in den Buchhandel gab. Bloß zum Gebrauche meiner Schüler bestimmt, sollte es von allen den Rücksichten unabhängig bleiben, die der Verfasser eines Schulbuchs theils auf das beurtheilende Publicum, theils auf das Bedürfniß anderer Schulen zu nehmen bewogen werden könnte.

Es ist keineswegs bewiesen, daß das Gebäude der Geometrie aus allen den mancherley Sätzen, wie Axiomen Postulaten, Erklärungen, Aufgaben, Lehrsätzen u. s. w. zusammen gesetzt seyn müsse. Es kann vielmehr schon aus Erklärungen und Folgerungen, die sich nach einander mittelst Axiomen herleiten lassen, aufgeführt werden. Da es ganz willkührlich ist, ob man einem abgeleiteten Satze die Form einer Aufgabe oder eines Lehrsatzes gebe, so hatte ich in jenem Lehrbuche alle Postulate und Aufgaben aus dem wissenschaftlichen Zusammenhange eliminirt, und dadurch das Ganze bedeutend ins Kürzere gezogen. Die Form der Lehrsätze hingegen hatte ich größtentheils beybehalten, der pädagogischen Kraft wegen, die in der strengen Führung zusammen gesetzter Beweise enthalten ist. Beweise, die mit andern Worten das Nähmliche sagen, was schon in dem ausgesprochenen Lehrsatze liegt, hatte ich ohne Bedenken ganz weggelassen; obgleich ich es auf der

andern Seite nicht gewagt hätte, einen Satz, wie den, daß Körper von gleicher Grundfläche und Höhe, die überall, in gleicher Höhe über der Grundfläche, gleiche Durchschnittsflächen haben, einander gleich sind (was gleichwohl in sehr guten neueren Lehrbüchern der Mathematik geschieht) als Axiom anzunehmen, und mich dadurch zugleich des weitläufigen Euklidischen Beweises für die Gleichheit der Parallelepipeden von gleicher Grundfläche und Höhe zu überheben. Wenn ich dieses Axiom gelten ließe, so hielte ich die Beybehaltung des andern Euklidischen Beweises für die Gleichheit der Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe, da er auf ein ähnliches Axiom gegründet werden könnte, zum wenigsten für inconsequent. Bey dem mir stets gegenwärtigen Bestreben, keine Lücke zu lassen, die einem mittelmäßigen Verstande empfindbar seyn könnte (was freylich sehr relativ ist), und auch keine der fruchtbareren geometrischen Wahrheiten zu übergehen, hatte jenes Lehrbuch doch nur den Umfang von drey Druckbogen umfaßt; ohne die Figuren, die ich damals aus pecuniärer Rücksicht nicht mitstechen, sondern von den Schülern selbst zeichnen ließ.

Einige, denen dieses Schriftchen in die Hände kam, fanden es für den Unterricht zweckmäßig, und bemerkten daran vorzüglich die Kürze. Ich wurde aufgefordert, es dem Buchhandel zu überlassen. Da es aber nur für einen Zweig des mathematischen Unterrichts auf Schulen bestimmt war, so wollte ich lieber nach demselben Plane ein Lehrbuch ausarbeiten, das alle Theile der reinen Elementar-Mathematik, die im Durchschnitt auf den bessern Deutschen Gymnasien gelehrt werden, umfaßte, und das ich hiermit dem Publicum übergebe. Die Anwendung, die ich schon für meine Person an einem ausgezeichneten Deutschen Gymnasium davon machen kann, rechtfertigt die Heraus-

gabe hinlänglich. Es versteht sich aber von selbst, daß es mich freuen würde, wenn auch andere Lehrer dieses Compendium für ihren Unterricht zweckmäßig und brauchbar fänden. Obgleich es kurz und gedrängt ist, so habe ich doch die Weise vieler Lehrbücher vermieden, Dinge, die zwar von der Belesenheit des Verfassers zeugen, aber an sich in dem Zusammenhange nicht nothwendig sind, durch ein oder einige hingeworfene Worte anzudeuten. Es wird Niemand, der einiges Talent für Mathematik besitzt, an irgend einer Stelle dieses Lehrbuchs in Verlegenheit gerathen.

In den niederen Abschnitten war ich wo möglich noch kürzer als in den höheren. Es hat dieses zum Theil seinen Grund in der Einrichtung unserer Gymnasien, wo die Schüler halbjährlich in höhere Classen versetzt werden, der Lehrer der Mathematik also nicht darauf rechnen kann, eine gewisse Zahl von Schülern von den ersten Anfangsgründen an im ununterbrochenen Zusammenhange bis zu den höheren Theilen seiner Wissenschaft fortzuführen; wo also der Lehrer der Mathematik einen jeden seiner Schüler theils individuell, theils als Mitglied der Classe, in der er sitzt, ins Auge fassen und dafür Sorge tragen muß, daß keiner die Classen des Gymnasiums durchläuft, der nicht am Ende doch einen vollständigen und gewinnreichen mathematischen Unterricht genossen hätte. Da nun die höheren Theile der Mathematik nur unter Voraussetzung der niederen verstanden werden können, so ist eine gedrängte Zusammenstellung der Hauptsätze höchst wünschenswerth und brauchbar, weil sich an dieselben eben so leicht ein sich weit ausbreitender, zum Selbstdenken weckender und bis zur geläufigsten Fertigkeit übender Unterricht anknüpfen läßt, als sie zu zweckmäßig angeordneten Repetitionen benutzt werden können. Die höheren Theile, die zugleich schon für die mehr ausge-

bildeten Schüler bestimmt sind, bedürfen weit weniger dieser compendiarischen Kürze. Gerne und absichtlich habe ich einzelne Abschnitte aus der reinen Elementar-Mathematik ganz übergangen, da sie dem folgenden Unterricht theils weniger zur Grundlage dienen, und also ihre Aufbewahrung im Compendium weniger nothwendig ist, theils gehörigen Ortes und zur gehörigen Zeit vom Lehrer leicht eingeschaltet werden können.

Es braucht kaum erinnert zu werden, daß beym Unterricht die einzelnen Abschnitte des Lehrbuchs nicht gerade in der Ordnung vorgenommen werden müssen, wie sie dastehen. Ich habe sogar einige später folgende Abschnitte, theils durch Auslassung weniger wichtiger Sätze, theils durch die Wahl der Darstellung, absichtlich rein von der Voraussetzung dieser oder jener vorher gehenden Abschnitte zu erhalten gesucht, um in der Anordnung der Abschnitte beym Unterricht freyere Hand zu behalten, da überhaupt das Compendium den Lehrer so wenig beengen soll, wie möglich.

Da übrigens ein mehrmaliger Gebrauch meines früheren geometrischen Lehrbuchs mir dargethan hat, daß sich darauf mit Leichtigkeit ein gründlicher und lebendiger, geistig anregender Unterricht in der Geometrie bauen lasse; so setzte ich mich bey der Herausgabe des gegenwärtigen mathematischen Lehrbuchs über meine früheren Bedenklichkeiten hinweg, und nahm es fast unverändert in dasselbe auf. Nur die zwischen den Text eingeschobenen Figuren sind eine nahmhafte Verbesserung, die es seinem Verleger verdankt.

Frankfurt am Mayn im September 1820.

L. Thilo.

Inhalt.

Einleitung . . . . Seite 1

I. Arithmetik.

Von den Zahlen überhaupt 1
Von den vier Species 2
Von den Brüchen 4
Von den Decimalbrüchen 8
Von den entgegen gesetzten Größen 10
Buchstabenrechnung 13
Von den Potenzen und Wurzeln 17
Vom binomischen Lehrsatze 26
Von den geometrischen Proportionen 30
Von den arithmetischen und geometrischen Reihen . . . 35
Von den Logarithmen 37

Algebra.

1) Von den Gleichungen überhaupt 40
2) Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade . . . 43
3) Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade, oder der quadratischen Gleichungen 49

II. Geometrie.

A. Elementar-Geometrie.

1) Planimetrie.

Von der geraden Linie, den Winkeln und Parallellinien . 53
Von den Figuren überhaupt 56
Von der Congruenz der Figuren und damit verwandten Gegenständen 58

Von der Gleichheit der Figuren in Rücksicht auf Flächeninhalt . . . . Seite 65

Von der Aehnlichkeit der Figuren 68

Vom Kreise 71

2) Stereometrie.

Lage der Ebenen gegen Punkte, Linien und Ebenen . . 82

Von den körperlichen Winkeln 85

Von den regulären Körpern 87

Von den prismatischen Körpern oder Prismen 88

Von den Pyramiden 92

Von der Kugel 95

B. Trigonometrie.

Von Berechnung der Dreyecke 99

Wichtigste Formeln für das Verhalten der trigonometrischen Linien unter einander 104

Von den negativen Werthen trigonometrischer Linien . . 108

Von dem Unterschiede algebraischer und transscendentischer Gleichungen 112

Sphärische Trigonometrie 114

C. Kegelschnitte.

1) Parabel 128

2) Ellipse 136

3) Hyperbel 141

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

Einleitung.

§. 1. Die Mathematik gründet sich auf die Vorstellung, die ein jeder Mensch hat,

a. von Zahlen,

b. von Ausdehnung.

Darnach zerfällt die Mathematik in zwey Haupttheile, den arithmetischen und geometrischen.

§. 2. Der Mathematiker schafft sich selbst Begriffe, die jenen Vorstellungen nicht widersprechen, und bestimmt sie durch die so genannten Erklärungen. Aus diesen Erklärungen leitet er vermittelst gewisser einfachen Sätze (der s. g. Grundsätze oder Axiome), die jeder vernünftige Mensch anerkennen muß, neue Wahrheiten her. So führt er, unabhängig von jeder Erfahrung, unabhängig also von Täuschungen seiner Sinne, ein unerschütterliches wissenschaftliches Gebäude auf, das über alle Zweifel und Einwürfe erhaben ist.

I. Arithmetik.

Von den Zahlen überhaupt.

§. 3. Wir bedienen uns zum Zählen des decadischen Zahlensystems, d. h. wir zählen bis zehn. Das ist an sich willkührlich. Nur hat in Rücksicht auf Bequemlichkeit ein Zahlensystem Vorzüge vor dem andern. Diese Vorzüge sind aber

unbedeutend gegen die Nachtheile, welche mit der Wegwerfung des von jeher allgemein gebrauchten Zahlensystems verbunden wären.

§. 4. Auch die Bezeichnungsart der Zahlen ist willkührlich. Wie wichtig aber eine bequeme Bezeichnungsart sey, lehrt die Geschichte der Mathematik, da bey den Alten die Arithmetik in Vergleich mit der Geometrie nur eine sehr niedrige Stufe der Ausbildung erreichte. Erst im zehnten Jahrhundert wurde die einfache Bezeichnungsart, nach welcher der Zahlwerth einer jeden Ziffer zugleich durch die Stelle bestimmt wird, von Gerbert, dem nachherigen Pabst Sylvester II, den Arabern in Spanien abgelernt und zu uns gebracht.

Von den vier Species.

§. 5. Eine Zahl, welche so groß ist, als zwey andere zusammen genommen, heißt die Summe dieser beyden Zahlen. Vgl. §. 15.

§. 6. Eine Zahl, um welche von zwey Zahlen die eine größer als die andere ist, heißt die Differenz dieser zwey Zahlen.

§. 7. Eine Zahl, welche einer andern mehrmal genommen gleich ist, heißt ein Product.

§. 8. Eine Zahl, welche bestimmt, wie oft eine Zahl in einer andern enthalten ist, heißt ein Quotient.

§. 9. Um eine Summe, Differenz, ein Product oder einen Quotienten zu finden, sind gewisse Rechnungs-Operationen erforderlich, welche man die vier Species nennt. Man erhält

die Summe durch die Addition,
die Differenz durch die Subtraction,
das Product durch die Multiplication,
den Quotienten durch die Division.

§. 10. Bey der Subtraction nennt man die Zahl, von welcher subtrahirt wird, den Minuendus, und die Zahl, welche subtrahirt wird, den Subtrahendus.

§. 11. Bey der Multiplication gibt man der Zahl, welche mehrmal genommen wird, und der Zahl, welche anzeigt, wie oft sie genommen werden soll, den gemeinschaftlichen Nahmen Factoren. Es kommt nämlich dasselbe heraus, ob man die Zahl 5 sechsmal oder die Zahl 6 fünfmal nimmt.

§. 12. Bey der Division nennt man die Zahl, welche dividirt werden soll, den Dividendus, und die Zahl, durch welche dividirt wird, den Divisor.

§. 13. Um anzudeuten, daß eine der vier Operationen vorgenommen werden soll, bedient man sich gewisser Zeichen:

für die Addition des Zeichens . . . . . . +
für die Subtraction . . . . —
für die Multiplication . . . . X oder .
für die Division . . . . : oder auch eines Querstrichs, über welchen man den Dividendus, und darunter den Divisor setzt.

Das Zeichen der Gleichheit ist . . . . . . =

z. B.

$$15 + 6 = 21$$
$$21 - 6 = 15$$
$$4 \times 6 \text{ oder } 4 \,.\, 6 = 24$$
$$24 : 6 \text{ oder } \frac{24}{6} = 4$$

§. 14. Die Ausdrücke, wie 15 + 6 u. s. w. nennt man dann selbst eine Summe, Differenz, u. s. w., obgleich diese Benennungen eigentlich nur den Zahlen zukommen, welche hier zur Rechten des Gleichheitszeichens stehen. Doch entsteht hieraus nirgends eine Zweydeutigkeit.

§. 15. Daß sich zu einer Summe noch eine dritte, vierte, fünfte u. s. w. Zahl addiren, mit einem Producte noch eine dritte, vierte, fünfte u. s. w. Zahl multipliciren lasse, daß man von einer Differenz noch eine dritte, vierte u. s. w. Zahl subtrahiren, und einen Quotienten noch durch eine dritte, vierte u. s. w. Zahl dividiren könne, versteht sich von selbst.

§. 16. Eben so, daß z. B. die Factoren eines Products

selbst wieder Differenzen, Summen, Quotienten, Producte seyn dürfen, u. s. w., daß sich überhaupt dergleichen Zusammensetzungen so weit treiben lassen, als man will.

§. 17. Um in dergleichen zusammen gesetzten Fällen jede Zweydeutigkeit zu vermeiden, schließt man diejenigen Zahlen, die man zusammen als ein Ganzes betrachtet, in Klammern ein, z. B.

$$(7+4).(8-2) = 11 . 6 = 66$$

$$7+4 .(8-2) = 7+4.6 = 7+24 = 31$$

$$(7+4). 8-2 = 11 . 8-2 = 88-2 = 86$$

$$7+4 . 8-2 = 7+32-2 = 37$$

§. 18. Aus §. 5 und 6 folgt: wenn zu einer Zahl eine zweyte Zahl addirt und von der Summe wieder subtrahirt wird, so bleibt die erste Zahl in ungeändertem Zustande, z. B. $9+8-8=9$.

Eben so $9-8+8=9$.

§. 19. Aus §. 7 und 8 folgt: wenn eine Zahl mit derselben zweyten Zahl multiplicirt und zugleich dividirt wird, so bleibt die erste Zahl in ungeändertem Zustande, z. B.
$\frac{6 \times 2}{2} = 6$ oder $\frac{6}{2} \times 2 = 6$.

Von den Brüchen.

§. 20. In Fällen, wo der Dividend kleiner als der Divisor ist, z. B. $\frac{5}{6}$, und man also nicht durch eine einfache Zahl angeben kann, wie oft der Divisor im Dividend enthalten sey, ist es bequemer, sich vorzustellen, 1 Ganzes sey in eine gewisse Anzahl gleicher Theile (hier 6) getheilt, und von diesen gleichen Theilen werde eine gewisse Anzahl (hier 5) genommen. Dann nennt man den Quotienten einen Bruch, und spricht ihn aus: »fünf Sechstel«. 5 nennt man jetzt den Zähler, und 6 den Nenner.

§. 21. Man wendet diese Vorstellungsart auch auf solche Fälle an, wo der Dividend größer als der Divisor ist, vorzüglich dann, wenn der Dividend im Divisor nicht aufgeht, z. B.

$\frac{15}{4}$ = fünfzehn Viertel = $\frac{12+3}{4} = 3 + \frac{3}{4}$, wofür man der Kürze wegen $3\frac{3}{4}$ (drey und drey Viertel) schreibt.

Wegen der häufigen Anwendung der Brüche in den Rechnungen thut man wohl, sich für die verschiedenen möglichen Fälle besondere Regeln herzuleiten, die man sich ein für allemal merkt.

§. 22. Wenn man eines Bruches Zähler mit einer ganzen Zahl multiplicirt, so wird der ganze Bruch mit derselben multiplicirt, z. B.

$$\frac{5}{12} \cdot 4 = \frac{5 \cdot 4}{12} = \frac{20}{12} = 1\frac{8}{12}$$

§. 23. Wenn man eines Bruches Zähler durch eine ganze Zahl dividirt, so wird der ganze Bruch dadurch dividirt, z. B.

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{6:3}{7} = \frac{2}{7}$$

§. 24. Wenn man eines Bruches Nenner mit einer ganzen Zahl multiplicirt, so wird der ganze Bruch dadurch dividirt, z. B.

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{6}{7 \cdot 3} = \frac{6}{21}$$

§. 25. Wenn man eines Bruches Nenner durch eine ganze Zahl dividirt, so wird der ganze Bruch dadurch multiplicirt, z. B.

$$\frac{5}{12} \cdot 4 = \frac{5}{12:4} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

§. 26. Wenn man also eines Bruches Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividirt, so wird er nach §. 23 dividirt, und nach §. 25 durch dieselbe Zahl multiplicirt, behält also nach §. 19 seinen ersten Werth, z. B.

$$\frac{6}{21} = \frac{6:3}{21:3} = \frac{2}{7}$$ (vgl. §. 23 und 24)

$$\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}$$ (vgl. §. 22 und 25)

Darauf beruht das s. g. Aufheben der Brüche.

§. 27. Wenn man eines Bruches Zähler und Nenner mit

derselben Zahl multiplicirt, so wird er nach §. 22 multiplicirt, und nach §. 24 dividirt, behält also nach §. 19 seinen ersten Werth, z. B.

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20}$$

Darauf beruht das Bringen der Brüche auf denselben Nenner. Beyspiele s. im folg. §.

§. 28. Aufgabe. Brüche zusammen zu addiren.

Auflösung. Haben sie gleiche Nenner, so addire man ihre Zähler und gebe der Summe den gemeinschaftlichen Nenner, z. B.

$$\frac{4}{10} + \frac{5}{10} = \frac{9}{10}$$

Sind die Nenner ungleich, so bringe man die Brüche auf gleiche Nenner, z. B.

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = \frac{23}{20} = 1\frac{3}{20}$$

Anderes Beyspiel:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} = \frac{2.5.7}{3.5.7} + \frac{3.3.7}{5.3.7} + \frac{4.3.5}{7.3.5} = \frac{70}{105}$$
$$+ \frac{63}{105} + \frac{60}{105} = \frac{193}{105} = 1\frac{88}{105}$$

§. 29. Aufg. Brüche von einander zu subtrahiren.

Aufl. Haben sie gleiche Nenner, so subtrahire man ihre Zähler, und gebe der Differenz den gemeinschaftlichen Nenner, z. B.

$$\frac{9}{10} - \frac{5}{10} = \frac{4}{10}$$

Sind die Nenner ungleich, so bringe man die Brüche auf gleiche Nenner, z. B.

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}$$

§. 30. Aufg. Brüche mit Brüchen zu multipliciren, z. B. $\frac{4}{5}$ mit $\frac{2}{3}$.

Aufl. Man soll $\frac{4}{5}$ nicht mit 2 Ganzen, sondern mit dem

3ten Theil von 2 Ganzen multipliciren. Man multiplicire also mit 2, und dividire hernach durch 3; gibt

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4.2}{5.3} = \frac{8}{15} \text{ (§. 22 und 24).}$$

Daher die allgemeine Regel:

man multiplicire Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner.

§. 31. Aufg. Brüche durch Brüche zu dividiren, z. B. $\frac{4}{5}$ durch $\frac{2}{3}$.

Aufl. Man soll $\frac{4}{5}$ nicht durch 2 Ganze, sondern nur durch den 3ten Theil von 2 Ganzen dividiren. Der 3te Theil von 2 Ganzen ist aber 3mal so oft als 2 Ganze in $\frac{4}{5}$ enthalten. Man dividire also durch 2 und multiplicire wieder mit 3; gibt

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4.3}{5.2} = \frac{12}{10} = 1\frac{2}{10} \text{ (§. 22 und 24)}$$

Daher die allgemeine Regel:

man multiplicire Zähler und Nenner des Dividenden mit Nenner und Zähler des Divisors.

§. 32. Wäre $\frac{7}{12}$ durch $\frac{5}{12}$ zu dividiren, so hätte man

$$\frac{7}{12} : \frac{5}{12} = \frac{7.12}{12.5} \text{ (§. 31)} = \frac{7}{5} \text{ (§. 26)} = 1\frac{2}{5}$$

oder: wenn Brüche gleiche Nenner haben, so braucht man nur ihre Zähler durch einander zu dividiren.

In manchen Fällen kann es bequemer seyn, Brüche von ungleichen Nennern in Brüche von gleichen Nennern zu verwandeln, und bloß die Zähler durch einander zu dividiren. Vgl. unten §. 38 d.

§. 33. Unter obigen Aufgaben sind alle möglichen Fälle mitbegriffen, auch der Fall, wo Ganze in der Rechnung vorkommen, indem man den Ganzen immer Bruchgestalt geben kann, zum Beyspiel:

$$6 : \frac{3}{4} = \frac{6}{1} : \frac{3}{4} = \frac{6.4}{1.3} = \frac{24}{3} = 8 \text{ (§. 31).}$$

Anderes Beyspiel:

$$3\frac{2}{5} \times 7\frac{3}{4} = \frac{15+2}{5} \times \frac{28+3}{4} = \frac{17}{5} \times \frac{31}{4}$$

$$= \frac{527}{20} = 26\frac{7}{20} \quad (\text{§. 21 und 30}).$$

Von den Decimalbrüchen.

§. 34. So wie nach unserer Art die Zahlen zu schreiben eine jede folgende Ziffer den zehnfach kleinern Werth hat, als wenn sie an der nächst vorher gehenden Stelle stände, bis die äußerste Ziffer zur Rechten nur noch einfache Ganzen bezeichnet; so kann man hinter diese äußerste Ziffer ein Comma und nach dem Comma noch andere Ziffern setzen, und unter jeder folgenden Ziffer immer den zehnfach kleineren Werth verstehen.

Z. B. 36,457 wäre $= 30 + 6 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1000}$

$$= 30 + 6 + \frac{400}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{7}{1000} = 36\,\frac{457}{1000}.$$

§. 35. Dieß gibt uns eine bequeme Bezeichnungsart für alle Brüche, deren Nenner die 1 mit Nullen ist, oder für die s. g. Decimalbrüche. Die Abwesenheit von Ganzen wird durch eine Null angedeutet, z. B. $0{,}0507 = \frac{507}{10000}$. Um den Nenner eines auf diese Art bezeichneten Decimalbruchs schnell zu übersehen, denke man sich unter dem Comma eine 1 und hinter der 1 so viele Nullen, als der Decimalbruch Ziffern (Decimalstellen) hat.

§. 36. Es ist

$$\frac{5}{8} = \frac{\frac{5}{8} \times 1000}{1000} \ (\text{§. } 19) = \frac{5000}{8} : 1000$$

$$= \frac{625}{1000} = 0{,}625$$

Eben so an einem andern Beyspiele:

$$\frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{3} \times 100000}{100000} \text{ (§. 19) } = \frac{200000}{3} : 100000$$

$$= \frac{66666\frac{2}{3}}{100000} = 0{,}66666 \ldots\ldots$$

Hierauf beruht das Verfahren, gewöhnliche Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln.

§. 37. Es ist

$$\frac{7}{10} = \frac{70}{100} = \frac{700}{1000} = \frac{7000}{10000} = \text{etc.}$$

oder

$$0{,}7 = 0{,}70 = 0{,}700 = 0{,}7000 = \text{etc.},$$

woraus man sieht, daß Decimalbrüche durch hinten angehängte Nullen ihren Werth nicht ändern.

Man kann also Decimalbrüche, welche verschiedene Nenner haben, durch hinten angehängte Nullen leicht auf einerley Nenner bringen.

§. 38. Da sich die Decimalbrüche nur durch ihre Bezeichnungsart von den gewöhnlichen Brüchen unterscheiden, so kann die Verschiedenheit der Rechnung mit Decimalbrüchen von der gewöhnlichen Bruchrechnung nur von dieser Bezeichnungsart herrühren. Das Resultat muß dasselbe seyn, wie bey gewöhnlichen Brüchen.

Wir erhalten daher folgende Regeln, die sich leicht aus §. 28 — 32 beweisen lassen, wenn man den Decimalbrüchen die gewöhnliche Bruchgestalt gibt.

a) für die Addition. Man schreibe Comma unter Comma, addire wie mit ganzen Zahlen, und gebe der Summe ein Comma unter dem Comma der übrigen, z. B.

$$\begin{array}{r} 0{,}452 \\ 17{,}47 \\ 8{,}9345 \\ \hline 26{,}8565 \end{array}$$

b) für die Subtraction. Man schreibe Comma unter Comma, subtrahire wie mit ganzen Zahlen, und gebe der Differenz ein Comma unter dem Comma der übrigen, z. B.

$$\begin{array}{r} 0,924 \\ 0,64 \\ \hline 0,284 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6,3 \\ 2,454 \\ \hline 3,846 \end{array}$$

c) für die Multiplication. Man multiplicire wie mit ganzen Zahlen und gebe dem Product so viele Decimalstellen als beyde Factoren zusammen genommen haben, z. B.

$$\begin{array}{r} 0,345 \\ 0,23 \\ \hline 1035 \\ 690 \\ \hline 0,07935 \end{array}$$

Denn der Nenner des einen Bruchs ist = 1000, der des andern = 100, also das Product beyder Nenner = 100000 (§. 30).

d) für die Division. Man bringe beyde Brüche auf einerley Nenner, (§. 37) und dividire Zähler durch Zähler, z. B.

$$\frac{0,65}{0,003} = \frac{0,650}{0,003} = \frac{650}{3} = 216,66\ldots.$$

Hier wird das Verfahren §. 32 angewandt.

Von den entgegen gesetzten Größen.

§. 39. In Fällen, wo der Minuendus kleiner als der Subtrahendus ist, z. B. 7 — 18, kann man die Subtraction eigentlich nicht vornehmen. Allein man hat deßwegen nicht nöthig, sich dadurch in dem Gange einer Rechnung stören zu lassen. Man darf nur

$$7 - 18 = -11$$

setzen, welches bedeutet, daß der Minuendus nicht größer, sondern um 11 kleiner als der Subtrahendus war.

So ist z. B.

$$100 + 7 - 18 = 100 - 11 = 89.$$

Es waren 7 zu addiren und 18 zu subtrahiren, also waren noch 11 zu subtrahiren.

Hier haben die 7 des Minuendus und 7 aus dem Subtrahendus sich gegenseitig aufgehoben. (vgl. §. 18).

§. 40. In dergleichen und ähnlichen Fällen ist es nicht unbequem, sich auszudrücken, es seyen Zahlen mit dem Zeichen $+$ (oder auch ohne Zeichen) und Zahlen mit dem Zeichen $-$ zusammen gekommen, und hätten sich gegenseitig aufgehoben. Jene nennt man dann positive und diese negative Zahlen oder Größen, und begreift beyde unter dem gemeinschaftlichen Nahmen von entgegen gesetzten Größen.

§. 41. Nach dieser Art sich auszudrücken ist

a) eine negative Größe addiren gleichbedeutend mit: eine positive subtrahiren.

In dem Beyspiele

$$13 - 6 = 7$$

wird 6 von 13 weggenommen, und dadurch die Zahl 13 auf 7 vermindert; man kann aber auch sagen, -6 komme zu 13 hinzu, und vermindere es dadurch auf 7.

Ferner ist

b) eine negative Größe subtrahiren gleichbedeutend mit: eine positive addiren.

In dem Beyspiele

$$30 - (27 - 8) = 30 - 19 = 11$$

soll $27 - 8$ oder 19 von 30 weggenommen werden. Hätte man 27 weggenommen, so hätte man 8 zu viel weggenommen, man müßte also wieder 8 addiren. Es ist also auch

$$30 - (27 - 8) = 30 - 27 + 8 = 3 + 8 = 11$$

Statt $27 - 8$ zu subtrahiren, kann man sich ausdrücken, es werde sowohl 27 als -8 subtrahirt, d. h. es werde 27 subtrahirt und 8 addirt.

§. 42. Eine leichte Ueberlegung führt auf folgende Regeln für die Rechnung mit entgegen gesetzten Größen, deren Anwendung jedoch vorzüglich erst in den folgenden Abschnitten von Wichtigkeit wird (vgl. §. 49 Anm. 2.)

a) Addition.

No. 1.	No. 2.	No. 3.	No. 4.
$+13$	$+13$	-13	-13
$+6$	-6	$+6$	-6
$+19$	$+7$	-7	-19

No. 1. ist das gewöhnliche Additions-Exempel.

No. 2. Das gewöhnliche Subtractions-Exempel (vgl. §. 41 a.)

No. 3. Das Subtractions-Exempel, wo der Minuendus 6 kleiner als der Subtrahendus 13 ist (vgl. §. 39). (Ob 6 oben oder unten steht, darauf kommt es hier nicht an).

No. 4. Es sollen sowohl 13 als 6 subtrahirt werden, also sollen im Ganzen 19 subtrahirt werden.

Allgemeine Regel: Wenn die Zeichen gleich sind, so addire man, und gebe der Summe das gemeinschaftliche Zeichen. Sind die Zeichen ungleich, so subtrahire man die kleinere Zahl von der größeren, und gebe der Differenz das Zeichen der größeren.

b) Subtraction.

Allgemeine Regel: Man ändere das Zeichen des Subtrahendus in das entgegengesetzte, und verfahre nach den Regeln der Addition. — Denn eine positive Größe subtrahiren ist gleichbedeutend mit: eine negative addiren; und eine negative Größe subtrahiren gleichbedeutend mit: eine positive addiren (§. 41 a und b).

Exempel:

+ 16	+ 7	− 16	− 7
+ 7	+ 16	− 7	− 16
(−)	(−)	(+)	(+)
+ 9	− 9	− 9	+ 9
	+ 16	− 16	
	− 7	+ 7	
	(+)	(−)	
	+ 23	− 23	

c) Multiplication.

No. 1.	No. 2.	oder	No. 3.
+ 6	− 6	+ 6	− 6
+ 5	+ 5	− 5	− 5
+ 30	− 30	− 30	+ 30

No. 1. ist das gewöhnliche Multiplications-Exempel.

No. 2. Die Zahl 6 soll 5 mal subtrahirt werden; sind also 30 zu subtrahiren.

No. 3. Die Zahl − 6 soll 5 mal subtrahirt werden, d. h. + 6 soll 5 mal addirt werden (§. 41 b.); sind also 30 zu addiren.

Allgemeine Regel: Gleiche Zeichen geben +, ungleiche Zeichen geben — im Producte.

d) Division.

Aus obigen Multiplications-Exempeln ergibt sich

$$\frac{+30}{+5} = +6 \qquad \frac{-30}{+5} = -6$$

$$\frac{-30}{-5} = +6 \qquad \frac{+30}{-5} = -6$$

Allgemeine Regel: Gleiche Zeichen geben +, ungleiche Zeichen geben — im Quotienten.

Buchstabenrechnung.

§. 43. Um irgend eine Zahl auszudrücken, ohne zu bestimmen was für eine, kann man sich willkührlicher Zeichen bedienen. Man gebraucht gewöhnlich die kleinen Lateinischen Buchstaben. Daher derjenige Theil der Arithmetik, welcher sich damit beschäftigt, arithmetische Ausdrücke allgemein darzustellen, und mit solchen allgemeinen Ausdrücken nach Regeln Veränderungen vorzunehmen, die Buchstabenrechnung genannt wird.

So drückt z. B. $a + b$ die Summe zweyer beliebigen Zahlen aus; $m - n$ bedeutet die Differenz zweyer beliebigen Zahlen, u. s. w.

§. 44. Rechnungen, welche auf bestimmte Resultate führen, wie bey Zahlenrechnungen, lassen sich mit Buchstaben freylich nicht vornehmen. Im Allgemeinen lassen sich die Buchstaben nur mit den gehörigen Zeichen zusammen setzen. In besonderen Fällen aber, zumal wenn derselbe Buchstab mehrmals vorkommt, wo man dann Zahlen mit den Buchstaben verbindet, können die durch Zusammensetzung der Buchstaben erhaltenen Ausdrücke zu besondern Zwecken auf mannigfache Art verändert werden.

So heißt z. B. $3.a$ so viel als: eine beliebige Zahl dreymal genommen, wofür man kürzer $3a$ schreibt.

§. 45. Zu beurtheilen, wo eine solche Veränderung thunlich oder zweckmäßig sey, muß dem Scharfsinne eines Jeden überlassen bleiben. Nur für die gewöhnlichsten Fälle pflegt man Re-

geln zu geben, um durch Uebung dem Scharfsinne zu Hülfe zu kommen.

§. 46. Addition. Sind die Buchstaben ungleich, so setzt man sie nur mit den gehörigen Zeichen neben einander. Sind die Buchstaben aber gleich, so schreibt man den Buchstab nur einmal hin, und setzt eine Zahl davor, welche anzeigt, wie oft er da stehen sollte.

Exempel.

1) $\begin{array}{c} a \\ b \\ \hline a + b \end{array}$ 2) $\begin{array}{c} 2a \\ -b \\ \hline 2a - b \end{array}$ (§. 42 a) 3) $\begin{array}{c} -a \\ +b \\ \hline b - a \end{array}$

4) $\begin{array}{c} 3a \\ 4a \\ \hline 7a \end{array}$ 5) $\begin{array}{c} 6c \\ -6c \\ \hline 0 \end{array}$ (§. 42 a) 6) $\begin{array}{c} -7m \\ -3m \\ \hline -10m \end{array}$

7) $$\begin{array}{l} a + 4b + 5c - 4d \\ 2a - 3b + 2c - 3d \\ 4a - 5b - 8c + f \\ \hline 7a - 4b - c - 7d + f \end{array}$$

§. 47. Subtraction. Man gebe dem Subtrahendus das entgegen gesetzte Zeichen, und verfahre wie bey der Addition. (vgl. §. 42 b). — Die Umänderung des Zeichens kann auch bloß in Gedanken geschehen.

Exempel.

1) $\begin{array}{c} a \\ b \\ \hline a - b \end{array}$ 2) $\begin{array}{c} a \\ -3b \\ \hline a + 3b \end{array}$ 3) $\begin{array}{c} 4a \\ a \\ \hline 3a \end{array}$

4) $\begin{array}{c} 8p \\ -3p \\ \hline 11p \end{array}$ 5) $\begin{array}{c} 3c \\ 7 \\ \hline 3c - 7 \end{array}$ 6) $\begin{array}{c} -10a \\ -3a \\ \hline -7a \end{array}$

7) $$\begin{array}{l} 5a + 4b + 6c - 8d \\ 4a - 3b - 2c - 9d + g \\ \hline a + 7b + 8c + d - g \end{array}$$

§. 48. Multiplication.

a) von einfachen Größen. Hier kann, was die Buchstaben betrifft, bloß angezeigt werden, daß die Multiplication geschehen ~~soll,~~ z. B. a mit b multiplicirt, gibt a × b oder

a . b, wofür man bey Buchstaben am liebsten ab, ohne Verbindungszeichen, schreibt.

Andere Beyspiele:

1) $\begin{array}{r} +\ 4a \\ +\ 3a \\ \hline +\ 12aa \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} +\ 3a \\ -\ 2b \\ \hline -\ 6ab \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} -\ 5ab \\ -\ 3c \\ \hline +\ 15abc \end{array}$

b) von zusammen gesetzten Größen, welche aus mehreren durch die Zeichen + oder — mit einander verbundenen Gliedern bestehen.

Man multiplicire nach der Reihe mit jedem Gliede des einen Factors alle Glieder des andern; und wende hierauf, wo es sich thun läßt, die Addition an.

Exempel:

1) $\begin{array}{lll} a + b & & \\ a + b & & \\ \hline aa + ab & & \\ \quad + ab & + bb & \\ \hline aa + 2ab & + bb & \end{array}$ 2) $\begin{array}{lll} a - b & & \\ a - b & & \\ \hline aa - ab & & \\ \quad - ab & + bb & \\ \hline aa - 2ab & + bb & \end{array}$

3) $\begin{array}{lll} a + b & & \\ a - b & & \\ \hline aa + ab & & \\ \quad - ab & - bb & \\ \hline aa & - bb & \end{array}$

4) $\begin{array}{lll} 5a + 4b & & \\ 6a - 3b & & \\ \hline 30aa + 24ab & & \\ \quad - 15ab & - 12bb & \\ \hline 30aa + 9ab & - 12bb & \end{array}$ 5) $\begin{array}{lll} 3a - 3 & & \\ 3a + 3 & & \\ \hline 9aa - 9a & & \\ \quad + 9a & - 9 & \\ \hline 9aa & - 9 & \end{array}$

6) $\begin{array}{llll} aa + 2ab + bb & & & \\ a + b & & & \\ \hline aaa + 2aab + abb & & & \\ \quad + aab & + 2abb & + bbb & \\ \hline aaa + 3aab & + 3abb & + bbb & \end{array}$

§. 49. Division.

a) von einfachen Größen. Was die Buchstaben betrifft, so kann, wenn diese ungleich sind, nur angedeutet werden, daß die Division geschehen soll; z. B. a durch b dividirt, gibt a : b

oder $\frac{a}{b}$. Gleiche Buchstaben im Dividend und Divisor dagegen lassen sich gegenseitig heben (vgl. §. 26).

Exempel.

1) $\frac{10a}{5b} = \frac{2a}{b}$ 2) $\frac{-3ab}{-6aa} = \frac{b}{2a}$

3) $\frac{4a}{-12ab} = -\frac{1}{3b}$ 4) $\frac{24abc}{6c} = 4ab$

5) $\frac{-6ab}{3} = -2ab$ 6) $\frac{8}{12c} = \frac{2}{3c}$

b) von zusammen gesetzten Größen. Hier kann man in vielen Fällen (nach der Analogie der Division mit Zahlen) folgende allgemeine Regel befolgen:

1) man dividire das erste Glied des Dividenden durch das erste Glied des Divisors, so erhält man das erste Glied des Quotienten.

2) Mit dem erhaltenen ersten Gliede des Quotienten multiplicire man alle Glieder des Divisors.

3) Dieses Product subtrahire man von dem Dividenden.

4) Das erste Glied des Restes dividire man wieder durch das erste Glied des Divisors, so erhält man das zweyte Glied des Quotienten, u. s. w.

Exempel.

$$\begin{array}{rr|l|l}
 & \text{Divisor} & \text{Dividend} & \text{Quotient} \\
1) & a + b & aa + 2ab + bb & a + b \\
 & & aa + ab & \\
\hline
 & & * + ab + bb & \\
 & & + ab + bb & \\
\hline
 & & * \quad * &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l|l}
2) & 5a + 4b & 30aa + 9ab - 12bb & 6a - 3b \\
 & & 30aa + 24ab & \\
\hline
 & & * - 15ab - 12bb & \\
 & & - 15ab - 12bb & \\
\hline
 & & * \quad * &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l|l}
3) & a + b & aa - bb & a - b \\
 & & aa + ab & \\
\hline
 & & * - ab - bb & \\
 & & - ab - bb & \\
\hline
 & & * \quad * &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
4.)\ 4a - 12b \,|\, 48aa - 160ab + 20ac + 48bb - 60bc \,|\, 12a - 4b + 5c \\
\qquad\qquad\quad\; 48aa - 144ab \\
\qquad\qquad\qquad\; * \;- 16ab + 20ac + 48bb - 60bc \\
\qquad\qquad\qquad\quad\; - 16ab \qquad\;\; + 48bb \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad * \;\; + 20ac \;\; * \;\; - 60bc \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; + 20ac \qquad\; - 60bc \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad * \qquad\qquad *
\end{array}
$$

Anmerkung 1. Dergleichen Divisions-Exempel setzen voraus, daß die Glieder des Divisors und Dividenden gehörig geordnet seyen. Da aber in unserem Lehrbuche weiter keine Anwendung mehr von der Division mit Buchstaben gemacht wird, so habe ich eine weitere ängstliche Auseinandersetzung dieser Rechnung in einem möglichst ins Kurze gedrängten Lehrbuche für überflüssig gehalten.

Anm. 2. Schon bey diesen Divisions-Exempeln zeigt sich eine sehr vortheilhafte Anwendung der Rechnung mit entgegen gesetzten Größen. Die dritte Forderung in der für die Division zusammen gesetzter Größen gegebenen Regel, daß man das Product aus dem erhaltenen Gliede des Quotienten in den Divisor von dem Dividenden subtrahiren solle, könnte ohne die Rechnung mit entgegen gesetzten Größen lange nicht so kurz ausgedrückt werden.

§. 50. Eine vorzügliche Anwendung der Buchstabenrechnung besteht darin, daß sich mittelst derselben arithmetische Sätze und Regeln allgemein herleiten und beweisen lassen.

So erhält man z. B. $aa - bb$, wenn man $a + b$ mit $a - b$ multiplicirt (§. 48. b. 3tes Ex.); oder es ist

$$(a + b) \cdot (a - b) = aa - bb$$

Dieß gibt uns folgenden allgemeinen arithmetischen Satz: »wenn man eine jede von zwey beliebigen Zahlen mit sich selbst multiplicirt, und die Producte von einander subtrahirt, so erhält man eben so viel, als wenn man die Summe beyder Zahlen in ihre Differenz multiplicirt.«

Exempel. Es ist $(12 + 9) \cdot (12 - 9) = 21 \cdot 3$
$= 63 = 12 \cdot 12 - 9 \cdot 9 = 144 - 81$.

Von den Potenzen und Wurzeln.

§. 51. Ein Product von mehreren gleichen Factoren heißt eine Potenz dieses Factors. Z. B. aa ist die zweyte Potenz von a, ferner aaa die dritte Potenz von a, ferner $ccccc$ die fünfte Potenz von c, ferner $(a + b) \cdot (a + b)$ die zweyte Potenz von $a + b$, u. s. w.

§. 52. Man pflegt den Factor nur einmal nieder zu schreiben, und oben zur Rechten durch eine Zahl anzuzeigen, die wie vielte Potenz von diesem Factor genommen werden soll, z. B. a^2 Statt aa; a^3 Statt aaa; c^5 Statt ccccc; $(a + b)^2$ statt $(a + b) . (a + b)$ u. s. w. Diese Zahl nennt man den Exponenten der Potenz.

Die zweyte und dritte Potenz heißen insbesondere Quadrat und Cubus.

§. 53. Diejenige Zahl p, welche auf die 2te, 3te, 4te u. s. w. Potenz erhoben die Zahl q gibt, heißt die 2te, 3te, 4te u. s. w. Wurzel aus der Zahl q, z. B. a ist die 3te Wurzel aus a^3, ferner 6 die 2te Wurzel aus 36, ferner 3 die 4te Wurzel aus 81, u. s. w.

Die 2te und 3te Wurzel heißen insbesondere Quadrat- und Cubicwurzel.

§. 54. Um anzudeuten, daß eine gewisse Wurzel aus einer Zahl genommen werden soll, bedient man sich des Zeichens $\sqrt{\ }$, z. B. $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[2]{9} = 3$, wo man im letzten Beyspiel der Kürze wegen lieber bloß $\sqrt{9} = 3$ schreibt.

§. 55. Es ist

$$a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa = a^5$$

Daraus die allgemeine Regel:

Sollen Potenzen derselben Zahl mit einander multiplicirt werden, so addire man ihre Exponenten.

§. 56. Es ist

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{aaaaa}{aa} = aaa = a^3$$

Daraus die allgemeine Regel:

Sollen Potenzen derselben Zahl durch einander dividirt werden, so subtrahire man ihre Exponenten.

§. 57. Es ist

$$(a^3)^2 = a^3 \times a^3 = aaa \times aaa = aaaaaa = a^6$$

Daraus die allgemeine Regel:

Soll eine Potenz einer Zahl noch einmal auf eine Potenz erhoben werden, so multiplicire man ihre Exponenten.

§. 58. Diese Regeln (§. 55 — 57) ergeben sich also ein-

zig aus der für die Potenzen gewählten willkührlichen Bezeichnungsart. Die allgemeine Anwendung dieser Regeln führt aber wieder auf Bezeichnungen, welche, falsch ausgelegt (indem man etwas anders unter ihnen sucht, als bloße Bezeichnungen), offenbaren Unsinn geben. Es folgen die wichtigsten:

§. 59. Es ist

$$a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} \text{ (§. 56)} = 1.$$

§. 60. Es ist

$$a^{-m} = a^{0-m} = \frac{a^0}{a^m} \text{ (§. 56)} = \frac{1}{a^m} \text{ (§. 59)}.$$

§. 61. Ein Product von null Factoren, wie man a^0, oder ein Product von negativen Factoren, wie man a^{-m} auslegen könnte, (§. 51), hat keinen Sinn. Es ist aber a^0 nur eine Bezeichnung für die 1 (deren es viele geben kann, zum Beyspiel $\frac{a}{m} \times \frac{m}{a} = 1$), welche dadurch entstanden ist, daß man irgend eine Potenz einer Zahl durch sich selbst dividirt, und dabey die Regel §. 56 angewandt hat. Es ist nämlich jede Größe durch sich selbst dividirt = 1.

Eben so ist a^{-m} nur eine andere Bezeichnung für die Einheit, dividirt durch die mte Potenz von a, eine Bezeichnung, welche durch eine Anwendung der Regel §. 56 auf den Fall entstanden ist, wo der Divisor von einer höheren Potenz als der Dividend war. Es ist z. B. $\frac{a^2}{a^5} = \frac{aa}{aaaaa} = \frac{1}{aaa} = \frac{1}{a^3}$.

Wendet man die Regel §. 56 an, so ist $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$, also a^{-3} nichts anders als eine andere Bezeichnungsart für $\frac{1}{a^3}$.

§. 62. Diese und ähnliche Bezeichnungen sind für die ganze Mathematik von der äußersten Wichtigkeit, und wenn sie mit der gehörigen Aufmerksamkeit angewandt werden, sind Trugschlüsse unmöglich. Aus §. 55 und 56 ergibt sich z. B., daß, bey einerley Zahl, Multiplication und Division der Potenzen mit Addition und Subtraction ihrer Exponenten einerley ist; und daß dieses,

in Rücksicht auf Bezeichnung, selbst in dem Falle Statt findet, wo der Divisor gleich oder größer als der Dividend ist, folgt aus §. 59 und 60. Daher man Potenzen mit negativen Exponenten ganz nach den Regeln der entgegen gesetzten Größen behandelt, z. B.

$$a^5 \times a^{-2} = a^{5-2} = a^3.$$
$$a^{-5} \times a^{-2} = a^{-7}$$
$$a^{-5} : a^2 = a^{-5-2} = a^{-7}$$
$$a^{-5} : a^{-2} = a^{-5-(-2)} = a^{-5+2} = a^{-3}$$
$$a^5 : a^{-2} = a^7$$
$$a^2 : a^{-5} = a^7 \quad \text{u. s. w.}$$

§. 63. Es ist

$\sqrt[n]{a^m}$ diejenige Zahl, welche auf die nte Potenz erhoben a^m gibt, also

$$(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$$

Es ist aber auch $m = \frac{m}{n} \times n$ (§. 19)

also

$$a^m = a^{\frac{m}{n} \times n} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n \text{ (§. 57).}$$

also (Axiom)

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = (\sqrt[n]{a^m})^n$$

folglich (Ax.)

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

und für $m = 1$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

d. h. gebrochene Exponenten sind mit Wurzelzeichen einerley.

§. 64. Es ist

$$aaa \times bbb \times ccc = abc \times abc \times abc$$

oder

$$a^3b^3c^3 = (abc)^3$$

§. 65. Es ist

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(ab)}$$

Denn

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \text{ (§. 63) } = (ab)^{\frac{1}{n}} \text{ (§. 64) } = \sqrt[n]{(ab)}.$$

§. 66. Der allgemeine Ausdruck für eine jede zweytheilige Größe ist

$$a + b$$

für das Quadrat einer jeden zweytheiligen Größe

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ (§. 48 b Ex. 1)}$$

für den Cubus

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ (§. 48 b Ex. 6).}$$

Diese allgemeinen Ausdrücke sind uns behülflich, aus einer jeden Zahl die Quadrat- und Cubicwurzel auszuziehen, wie folgende Beyspiele zeigen.

§. 67. Beyspiele zur Ausziehung der Quadratwurzeln:

a) Die Quadratwurzel aus 5776 zu ziehen.

	57	76	(76
$a^2 =$	49		
	8	76	$= 2ab + b^2$
	(1	4)	$= 2a$
$2ab =$	8	40	} 876
$b^2 =$		36	}
	*	*	

b) Die Quadratwurzel aus 7661824 zu ziehen.

7	66	18	24	(2768
4				
3	66			
	(4)			
3	29			
	37	18		
	(5	4)		
	32	76		
	4	42	24	
		(55	2)	
	4	42	24	
	*	*	*	

c) Die Quadratwurzel aus 232 zu ziehen (vgl. §. 69 und 70).

2	32	(15,2315				
1						
1	32					
	(2)					
1	25					
	7	00				
	(3	0)				
	6	04				
		96	00			
		(30	4)			
		91	29			
		4	71	00		
		(3	04	6)1		
		1	66	39	00	
			(30	46	2)	
		1	52	31	25	
			14	07	75	

§. 68. Beyspiele zur Ausziehung der Cubicwurzeln.

a) Die Cubicwurzel aus 658503 zu ziehen.

	658	503	(87
$a^3 =$	512		
	146	503	$= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
	(19	2)	$= 3a^2$
$3a^2b =$	134	400	} 146503
$3ab^2 =$	11	760	
$b^3 =$		343	
	*	*	

b) Die Cubicwurzel aus 53157376 zu ziehen.

53	157	376. (376	
27			
26	157		
(2	7)		
18	9	} 23653	
4	41		
	343		
2	504	376	
	(410	7)	
2	464	2	} 2504376
	39	96	
		216	
	*	*	

c) Die Cubicwurzel aus 7508 zu ziehen.

7	508 (19,581				
1					
6	508				
	(3)				
2	7				
2	43	5859			
	729				
	649	000			
	(108	3)			
	541	5			
	14	25	555875		
		125			
	93	125	000		
	(11	407	5)		
	91	260	0		
		374	40	91634912	
			512		
	1	490	088	000	
	(1	150	129	2)	
	1	150	129	2	
			58	74	1150187941
				1	
		339	900	059	

§. 69. Da

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m}{n} \times \frac{m}{n} = \frac{m.m}{n.n} \text{ (§. 30) } = \frac{m^2}{n^2}$$

ist, da man also, um einen Bruch auf das Quadrat zu erheben, sowohl den Zähler als den Nenner quadriren muß; so muß man umgekehrt, wenn man aus dem ganzen Bruch die Quadratwurzel ziehen will, sowohl aus Zähler als Nenner die Wurzel ziehen. Z. B. $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$.

§. 70. Es ist

$$232 = \frac{2\ 32\ 00\ 00\ 00\ 00}{1\ 00\ 00\ 00\ 00}$$

also

$$\sqrt{232} = \frac{\sqrt{2\ 32\ 00\ 00\ 00\ 00}}{\sqrt{1\ 00\ 00\ 00\ 00}}$$

Nun fällt $\sqrt{23200000000}$, wie man aus dem dritten Bey=

spiele §. 67 sieht, zwischen 152315 und 152316; und es ist $\sqrt{100000000} = 10000$, daher ist sehr nahe

$$\sqrt{232} = \frac{152315}{10000} = 15,2315$$

So läßt sich also, wenn die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl nicht aufgeht, dieselbe auf so viele Decimalbruchstellen berechnen, als man will, indem jedes Nullenpaar, das man der Zahl anhängt, eine neue Decimalstelle in der Wurzel gibt.

§. 71. Es läßt sich also auch aus jedem Decimalbruche durch eine einzige Rechnung die Quadratwurzel ziehen, wobey man nur zu bemerken hat, daß die Zahl der Decimalstellen gerade seyn muß, weil nur aus den Nennern 100; 10000; 1000000; u. s. w., aber nicht aus den Nennern 10; 1000; u. s. w., die Quadratwurzel aufgeht.

Exempel:

$\sqrt{0,24} = 0,489898 \ldots$; $\sqrt{0,3} = \sqrt{0,30} = 0,5477 \ldots\ldots$

$\sqrt{0,03} = 0,1732 \ldots$; $\sqrt{0,000025} = 0,005$

$\sqrt{2,3} = \sqrt{2,30} = 1,5165 \ldots\ldots$

$\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \sqrt{0,66666666 \ldots} = 0,8164 \ldots$

§. 72. Aehnliche Bemerkungen, wie §. 69 bis 71, gelten auch für die Ausziehung der Cubicwurzel. Nur muß man hier immer 3 Nullen anhängen, wenn die Wurzel nicht aufgeht, und bey Decimalbrüchen muß sich die Zahl der Decimalstellen durch 3 dividiren lassen; weil nur aus den Nennern 1000; 1000 000; 1000 000 000 u. s. w. die Cubicwurzel aufgeht. (vgl. §. 68 Ex. c).

Exempel:

$\sqrt[3]{0,638} = 0,8608 \ldots\ldots$; $\sqrt[3]{0,45} = \sqrt[3]{0,450} = 0,7663 \ldots$

$\sqrt[3]{0,7} = \sqrt[3]{0,700} = 0,8879 \ldots$

$\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}} = \sqrt[3]{0,666\,666\,666 \ldots\ldots} = 0,873 \ldots\ldots$

§. 73. Wenn bey der Ausziehung der Quadrat- und Cubicwurzeln ein Rest bleibt, und das Quadrat oder der Cubus eine ganze Zahl war; so ist die gefundene Wurzel um weniger als 1 kleiner als die wahre. Es läßt sich beweisen, daß dieser Werth, der kleiner als 1 ist, auf keine Weise durch einen Bruch

vollständig ausgedrückt werden kann, indem man nämlich darthut, daß in keinem Falle eine ganze Zahl und ein Bruch, zusammen auf irgend eine Potenz erhoben, eine ganze Zahl geben.

Es sey a irgend eine ganze Zahl, und $\frac{m}{n}$ ein Bruch, der kleiner als 1 ist, und nicht weiter aufgehoben werden kann (§. 26), und zwar seyen m und n ganze Zahlen, so ist

$$\left(a + \frac{m}{n}\right)^2 = a^2 + 2a \cdot \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2}$$

Da nun a, also auch a^2, eine ganze Zahl ist, so müßte, damit das Quadrat von $a + \frac{m}{n}$ eine ganze Zahl werde, $\frac{2am}{n} + \frac{m^2}{n^2}$, also auch das nfache davon, oder $2am + \frac{m^2}{n}$ eine ganze Zahl seyn. Da nun ferner 2am jedesmal eine ganze Zahl ist, so müßte auch $\frac{m^2}{n}$ eine ganze Zahl seyn können. Da aber, nach der Voraussetzung, m und n nicht durch die nämliche Zahl dividirt werden können (§. 26), so können eben so wenig m^2 und n durch die nämliche Zahl dividirt werden, und n kann in m^2 nicht aufgehen, also $\frac{m^2}{n}$ keine ganze Zahl seyn.

Es kann also das Quadrat von $a + \frac{m}{n}$ keine ganze Zahl seyn. Eben so wenig kann irgend eine höhere Potenz von $a + \frac{m}{n}$ eine ganze Zahl seyn (vgl. §. 50).

§. 74. Solche Wurzeln, die durch Zahlen nicht vollständig angegeben werden können, heißen Irrationalzahlen (von ratio, Verhältniß, weil sich ihr Verhältniß zur Zahl 1 nicht angeben läßt). Man kann sich aber dem wahren Werthe solcher Wurzeln mittelst der Decimalbrüche so sehr nähern, als es in der Anwendung verlangt wird, wie man aus den dritten Beyspielen §. 67 und 68 sieht.

§. 75. Die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl kann sowohl positiv, als negativ seyn. Denn sowohl $+a \cdot +a$ als $-a \cdot -a$ gibt $+a^2$. Dasselbe findet bey allen geraden Wurzeln aus positiven Zahlen Statt.

Die Cubicwurzel aus einer positiven Zahl kann selbst wieder

nur positiv, aus einer negativen Zahl nur negativ seyn. Denn $+a \,.\, +a \,.\, +a$ gibt $+a^3$, und $-a \,.\, -a \,.\, -a$ gibt $-a^3$. Dasselbe gilt von allen ungeraden Wurzeln aus positiven oder negativen Zahlen.

Hingegen die geraden Wurzeln aus negativen Zahlen sind weder positiv noch negativ, indem weder $+a \,.\, +a$, noch $-a \,.\, -a$ ein negatives Quadrat gibt. Man nennt sie daher unmögliche oder imaginäre Größen.

Z. B. $\sqrt{-4}$ ist eine imaginäre Größe, d. h. sie kann auf keine Weise (auch nicht näherungsweise, wie die Irrationalzahlen) angegeben werden.

Vom binomischen Lehrsatze.

§. 76. Macht man nach und nach die Potenzen von $a+b$ und von $a-b$, so erhält man folgendes:

$$
\begin{array}{lllllll}
a & +b & & & & & \\
a & +b & & & & & \\
\hline
a^2 & +ab & & & & & \\
 & +ab & +b^2 & & & & \\
\hline
a^2 & +2ab & +b^2 = (a+b)^2 & & & & \\
a & +b & & & & & \\
\hline
a^3 & +2a^2b & +ab^2 & & & & \\
 & +a^2b & +2ab^2 & +b^3 & & & \\
\hline
a^3 & +3a^2b & +3ab^2 & +b^3 = (a+b)^3 & & & \\
a & +b & & & & & \\
\hline
a^4 & +3a^3b & +3a^2b^2 & +ab^3 & & & \\
 & +a^3b & +3a^2b^2 & +3ab^3 & +b^4 & & \\
\hline
a^4 & +4a^3b & +6a^2b^2 & +4ab^3 & +b^4 = (a+b)^4 & & \\
a & +b & & & & & \\
\hline
a^5 & +4a^4b & +6a^3b^2 & +4a^2b^3 & +ab^4 & & \\
 & +a^4b & +4a^3b^2 & +6a^2b^3 & +4ab^4 & +b^5 & \\
\hline
a^5 & +5a^4b & +10a^3b^2 & +10a^2b^3 & +5ab^4 & +b^5 = (a+b)^5 & \\
a & +b & & & & & \\
\hline
a^6 & +5a^5b & +10a^4b^2 & +10a^3b^3 & +5a^2b^4 & +ab^5 & \\
 & +a^5b & +5a^4b^2 & +10a^3b^3 & +10a^2b^4 & +5ab^5 & +b^6 \\
\hline
a^6 & +6a^5b & +15a^4b^2 & +20a^3b^3 & +15a^2b^4 & +6ab^5 & +b^6 = (a+b)^6
\end{array}
$$

u. s. w.

$$
\begin{array}{l}
a - b \\
a - b \\
\hline
a^2 - ab \\
\quad - ab + b^2 \\
\hline
a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \\
a - b \\
\hline
a^3 - 2a^2b + ab^2 \\
\quad - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\
\hline
a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3 \\
a - b \\
\hline
a^4 - 3a^3b + 3a^2b^2 - ab^3 \\
\quad - a^3b + 3a^2b^2 - 3ab^3 + b^4 \\
\hline
a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 = (a-b)^4 \\
a - b \\
\hline
a^5 - 4a^4b + 6a^3b^2 - 4a^2b^3 + ab^4 \\
\quad - a^4b + 4a^3b^2 - 6a^2b^3 + 4ab^4 - b^5 \\
\hline
a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5 = (a-b)^5 \\
a - b \\
\hline
a^6 - 5a^5b + 10a^4b^2 - 10a^3b^3 + 5a^2b^4 - ab^5 \\
\quad - a^5b + 5a^4b^2 - 10a^3b^3 + 10a^2b^4 - 5ab^5 + b^6 \\
\hline
a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6 = (a-b)^6
\end{array}
$$

u. s. w.

§. 77. Die Potenzen von $a + b$ und $a - b$ unterscheiden sich bloß dadurch von einander, daß die Glieder der letzten von gerader Ordnung (d. h. das 2te, 4te, 6te u. s. w. Glied) negativ sind, weil sie immer ungerade Potenzen von $-b$ enthalten.

§. 78. Nimmt man zuerst bloß auf die Buchstaben a und b Rücksicht, so erkennt man leicht das Gesetz, nach welchem die Glieder der einzelnen Potenzen fortgehen. Zum Beyspiel für die fünfte Potenz von $a + b$ erhält man das Product aus folgenden zwey Reihen:

$$
\begin{array}{cccccc}
a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a^1 & a^0 \\
b^0 & b^1 & b^2 & b^3 & b^4 & b^5 \\
\hline
a^5 & a^4b & a^3b^2 & a^2b^3 & ab^4 & b^5
\end{array}
$$

wo die Reihe der Potenzen von a immer mit derselben Potenz anfängt, auf welche das Binomium oder der zweytheilige Aus-

druck $a+b$ erhoben werden soll, und bis zu $a^0 = 1$ fortgeht. Die Potenzen von b fangen umgekehrt mit $b^0 = 1$ an, und gehen bis zur Potenz des Binomiums fort.

§. 79. Was die Zahlen oder Coefficienten betrifft, womit die einzelnen Glieder der verschiedenen Potenzen von $a+b$ multiplicirt sind, so findet man leicht, daß sie die Anzahl der Versetzungen ausdrücken, die mit den Buchstaben desjenigen Gliedes möglich sind, vor welchem sie stehen. Z. B. a^5 oder aaaaa hat zum Coefficienten 1, weil man die Buchstaben nur auf eine Art hinsetzen kann. $5a^4b$ hat 5 zum Coefficienten, weil die Buchstaben aaaab fünf Versetzungen geben, nämlich: aaaab, aaaba, aabaa, abaaa und baaaa; u. s. w.

§. 80. Zwey Buchstaben überhaupt lassen sich auf zwey verschiedene Arten hinsetzen, nämlich ab und ba. Kommt ein dritter Buchstab c hinzu, so kann er in jeder der beyden Versetzungen die erste, zweyte oder dritte Stelle einnehmen; es gibt also $1 . 2 . 3$ verschiedene Versetzungen der Buchstaben a, b, c, nämlich:

cab, acb, abc
cba, bca, bac

Bey vier verschiedenen Buchstaben, a, b, c, d, kann d in obigen Versetzungen immer die erste, zweyte, dritte oder vierte Stelle einnehmen; gibt $1 . 2 . 3 . 4 = 24$ Versetzungen. Eben so hätte man für fünf verschiedene Dinge $1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$ Versetzungen. U. s. w.

§. 81. Kommen unter den Buchstaben gleiche vor, so wird dadurch die Zahl der Versetzungen verringert. Wären z. B., Statt a, b, c, d, bloß a, b, a, d zu versetzen, so wären alle Verbindungen, in welchen a vornen und c hinten vorkommt, einerley mit denen, worin c vornen und a hinten vorkommt. Die Zahl der Versetzungen ist also $= \frac{1 . 2 . 3 . 4}{2} = 12$.

Wäre bloß a, b, a, a zu versetzen, so wären alle Verbindungen, worin a, c, d dieselben Stellen, nur verwechselt, einnehmen, immer auf eine reducirt. Die Zahl der Versetzungen

ist also dann $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = 4$. Eben so findet man die Zahl der Versetzungen von a, a, b, b $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6$.

§. 82. Wendet man dieß z. B. auf die fünfte Potenz von $a + b$ an, so ist die Zahl der Versetzungen von $a^5 = 1$; die Zahl der Versetzungen von $a^4b = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1} = \frac{5}{1}$, also der zweyte Coefficient $= 5$; die Zahl der Versetzungen von $a^3b^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ für das dritte Glied; die Zahl der Versetzungen von $a^2b^3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ $= 10$ für das vierte Glied; die Zahl der Versetzungen von $ab^4 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$ für das fünfte Glied; die Zahl der Versetzungen für $b^5 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1$.

Eben so wäre das dritte Glied der sechsten Potenz von $a + b = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot a^4b^2 = 15a^4b^2$; das sechste Glied der 7ten Potenz von $a + b = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot a^2b^5 = 21\,a^2b^5$; das fünfte Glied der rten Potenz von $a + b = \frac{r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot (r-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^{r-4}b^4$; u. s. w.

§. 83. So erhält man für jede Potenz des Binomiums $a \pm b$ folgende allgemeine Formel:

$$(a \pm b)^n = a^n \pm n \cdot a^{n-1}b + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2}b^2$$

$$\pm \frac{n \cdot (n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{n-3}b^3 + \frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4}b^4 \pm \text{etc.}$$

wo, wenn n eine ganze positive Zahl ist, die Formel jedesmal abbricht, sobald die Zahl der Glieder eins mehr als die Zahl n beträgt.

Von den geometrischen Proportionen.

§. 84. Wenn zwey Quotienten oder Brüche einander gleich sind; z. B.

$$\frac{12}{4} = \frac{18}{6} \ (=3)$$

oder

$$12 : 4 = 18 : 6$$

so drückt man sich auch auf folgende Art aus:

»Es verhält sich 12 zu 4 wie 18 zu 6.«

Diese Art sich auszudrücken stimmt mehr mit dem gemeinen Sprachgebrauche überein, und erleichtert daher die Anwendung auf Fragen des gemeinen Lebens. Dieser Sprachgebrauch ist ebenfalls in die Geometrie übergegangen.

§. 85. Einen solchen Ausdruck, wie 12 : 4 = 18 : 6, nennt man dann eine geometrische Proportion. Man sagt von einer Proportion, sie bestehe aus vier Gliedern, dem ersten, zweyten, dritten und vierten. Das erste und vierte nennt man die beyden äußern, das zweyte und dritte die beyden innern Glieder.

Die beyden gleichen Quotienten oder Brüche, woraus die Proportion besteht, nennt man jetzt die beyden Verhältnisse. Was sonst Dividend oder Zähler heißt, nennt man nun Vorderglied des Verhältnisses; und die beyden Divisoren oder Nenner heißen jetzt die beyden Hinterglieder. Endlich die Zahl, welche anzeigt, wie oft das Hinterglied im vordern enthalten sey (in unserm Beyspiel die Zahl 3), heißt der Exponent des Verhältnisses.

§. 86. Verhältniß, Quotient und Bruch sind also nur verschiedene Nahmen für die nämliche Sache. Alle Aenderungen, welche sich mit zwey gleichen Brüchen vornehmen lassen, wodurch man wieder zwey gleiche Brüche erhält, können auch mit den beyden Verhältnissen einer Proportion gemacht werden, und es entsteht daraus immer wieder eine richtige Proportion. Was überhaupt von zwey gleichen Größen gilt, das gilt auch von den beyden Verhältnissen einer Proportion.

So leicht und geringfügig daher nachfolgende Sätze zum

Theil auch scheinen mögen, so erleichtert es doch sehr ihre Anwendung auf die Geometrie, wenn man sich dieselben zum Voraus gemerkt hat.

§. 87. Das Product der beyden äußern Glieder ist dem Product der beyden innern gleich.

Beweis. Es sey

$$a : b = c : d \text{ oder } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

so ist (Ax.)

$$\frac{a \cdot d}{b} = \frac{c \cdot d}{d} \text{ oder } \frac{a \cdot d}{b} = c \text{ (§. 19)}$$

und

$$\frac{a \cdot d \cdot b}{b} = c \cdot b \text{ oder } ad = bc$$

§. 88. Ein jedes Glied einer Proportion läßt sich durch die drey übrigen bestimmen, nämlich:

Das erste Glied ist gleich dem Product der beyden innern, dividirt durch das vierte.

Das zweyte Glied ist gleich dem Product der beyden äußern, dividirt durch das dritte.

Das dritte Glied ist gleich dem Product der beyden äußern, dividirt durch das zweyte.

Das vierte Glied ist gleich dem Producte der beyden innern, dividirt durch das erste.

§. 89. Wenn zwey Producte einander gleich sind, so geben ihre vier Factoren acht Proportionen, wenn man die Factoren des einen Products entweder die äußern oder die innern Glieder ausmachen läßt.

Da z. B. $4 \cdot 9 = 3 \cdot 12 = 36$, so geben die vier Zahlen 4; 9; 3 und 12 folgende acht Proportionen:

$$4 : 3 = 12 : 9$$
$$4 : 12 = 3 : 9$$
$$9 : 3 = 12 : 4$$
$$9 : 12 = 3 : 4$$
$$3 : 4 = 9 : 12$$
$$3 : 9 = 4 : 12$$
$$12 : 4 = 9 : 3$$
$$12 : 9 = 4 : 3$$

§. 90. In einer jeden Proportion lassen sich also die Glieder noch auf sieben verschiedene Arten versetzen, so daß immer wieder eine richtige Proportion heraus kommt; wenn man dabey nur immer beobachtet, daß die beyden äußern Glieder wieder die beyden äußern bleiben, oder zugleich die beyden innern werden.

§. 91. Wenn die Vorderglieder einer Proportion einander gleich sind, so sind auch die Hinterglieder einander gleich.

Eben so, wenn die Hinterglieder einander gleich sind, so sind es auch die Vorderglieder.

Anmerkung. Diese Sätze sind so leicht, daß sie auf Beyspiele in Zahlen angewandt, sich fast lächerlich ausnehmen. Mit Hinsicht auf die Geometrie ist es jedoch gut, sich dieselben gemerkt zu haben.

§. 92. So wie man eines Bruches Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl multipliciren oder durch die nämliche Zahl dividiren kann, ohne daß der Werth des Bruches sich verändert (§. 26 und 27), so kann man auch das Vorder- und Hinterglied eines Verhältnisses mit der nämlichen Zahl multipliciren oder beyde durch die nämliche Zahl dividiren, ohne daß die Proportion darunter leidet.

§. 93. Es läßt sich auch das erste und dritte, oder das zweyte und vierte Glied mit derselben Zahl multipliciren oder durch dieselbe Zahl dividiren.

§. 94. Beyde Verhältnisse einer Proportion lassen sich mit demselben dritten Verhältnisse multipliciren. Es sey

$$a : b = c : d$$

und $p : q$ irgend ein drittes Verhältniß, so ist

$$ap : bq = cp : dq$$

§. 95. Eben so kann man das zweyte Verhältniß mit einem vierten multipliciren, das dem dritten gleich ist, womit man das erste Verhältniß multiplicirt hat. Mit andern Worten:

§. 96. Wenn man zwey Proportionen hat, so kann man daraus eine dritte machen, indem man die Glieder von gleicher Ordnung in beyden mit einander multiplicirt.

Wenn

$$a : b = c : d$$

und

$$m : n = p : q$$

so ist auch

$$am : bn = cp : dq$$

Auf diese Art lassen sich so viele Proportionen, als man will, mit einander verbinden.

§. 97. Eben so kann man in zweyen Proportionen die Glieder der einen durch die Glieder von der gleichen Ordnung in der andern dividiren.

§. 98. Man kann alle Glieder einer Proportion zugleich quadriren, oder zugleich cubiren, oder auf irgend eine andere Potenz erheben. Dieß folgt aus §. 96, indem man die zweyte, dritte u. s. w. Proportion mit der ersten identisch annimmt.

Umgekehrt kann man aus allen Gliedern dieselbe Wurzel ziehen.

§. 99. Wenn $a : b = c : d$, so ist auch

$$a + b : b = c + d : d$$

Bew. Nach der Voraussetzung ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

also (Ax.)

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

oder

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d}$$

also

$$\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$$

oder

$$a + b : b = c + d : d$$

§. 100. Wenn $a : b = c : d$, so ist auch

$$a - b : b = c - d : d$$

Der Beweis wird auf ähnliche Art wie §. 99 geführt.

§. 101. Wenn zwey Proportionen gleiche Exponenten haben, so kann man eine dritte Proportion daraus zusammen setzen, indem man die Glieder von gleicher Ordnung zusammen addirt.

Bew. Man drücke die beyden Proportionen auf folgende Art aus:

$$em : m = en : n$$

und

$$ep : p = eq : q$$

Addirt man die einzelnen Glieder, so erhält man

$$em + ep : m + p = en + eq : n + q$$

oder

$$e(m + p) : (m + p) = e(n + q) : (n + q)$$

wo die Richtigkeit der Proportion sogleich in die Augen fällt.

Eben so kann man drey, vier und mehrere Proportionen von gleichen Exponenten durch Addition zusammen setzen.

§. 102. Auf gleiche Weise kann man in zweyen Proportionen von gleichen Exponenten die Glieder gleicher Ordnung von einander subtrahiren.

§. 103. Wenn in zwey Proportionen drey Glieder von derselben Ordnung einander gleich sind, so ist auch das vierte in beyden gleich.

§. 104. Wenn in zwey Proportionen zwey Verhältnisse einander gleich sind, so sind es auch die beyden andern, und bilden folglich wieder eine Proportion.

---

§. 105. Zwey gleiche Kapitale, die um gleich hohe Prozente ausgeliehen sind, geben auch gleiche jährliche Interessen. Bey gleichen Prozenten, aber ungleichen Kapitalen, verhalten sich die Interessen wie die Kapitale; und bey gleichen Kapitalen, aber ungleichen Prozenten, verhalten sich die Interessen wie die Prozente.

Daraus folgt, daß bey ungleichen Kapitalen und ungleichen Prozenten sich die jährlichen Interessen wie die Producte aus den Kapitalen und den Prozenten verhalten.

Bew. Das erste Kapital sey m mal so groß als das zweyte, und die Prozente, welche für das erste gegeben werden, seyen n mal so groß als für das zweyte, wo m und n beliebige ganze Zahlen oder Brüche bedeuten können: so belaufen sich die Interessen des ersten Kapitals, vermöge der ersten Voraussetzung, m mal so hoch, und, vermöge der zweyten Voraussetzung, n mal so hoch; also, wenn beyde Voraussetzungen zugleich Statt finden, mn mal

so hoch, als die Interessen des zweyten, d. h. es verhalten sich die jährlichen Interessen beyder Kapitale wie mn : 1.

Bezeichnet man nun die ungleichen Kapitale mit K, k, die Prozente mit P, p und die jährlichen Interessen mit I, i, so ist

$$m = \frac{K}{k} \text{ und } n = \frac{P}{p}$$

also (Ar.)

$$m \cdot n = \frac{K}{k} \cdot \frac{P}{p} = \frac{KP}{kp}$$

oder

$$KP : kp = m \cdot n : 1$$

folglich

$$KP : kp = I : i$$

Zusatz. Denkt man sich Statt Interessen unter I irgend etwas Anderes, dessen Werth von irgend zweyen Größen, K und P, zugleich abhängt, so daß

$$1) \text{ für } P = p$$
$$I : i = K : k$$

und

$$2) \text{ für } K = k$$
$$I : i = P : p$$

so hat man auch allgemein

$$I : i = KP : kp$$

§. 106. Wenn in einer Proportion die beyden mittlern Glieder einander gleich sind, so nennt man sie eine stetige Proportion, z. B.

$$8 : 12 = 12 : 18$$

Die Zahl 12 heißt hier die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 8 und 18. Die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen zweyen gegebenen Zahlen wird gefunden, wenn man aus dem Producte der beyden Zahlen die Quadratwurzel zieht. Folgt aus §. 87.

Von den arithmetischen und geometrischen Reihen.

§. 107. Eine Reihe von Zahlen, in welcher jede zwey auf einander folgende Glieder dieselbe Differenz haben, heißt eine

arithmetische Reihe. Eine Reihe, in welcher jede zwey auf einander folgende Glieder denselben Quotienten haben, heißt eine geometrische Reihe.

Der allgemeine Ausdruck für eine jede arithmetische Reihe ist

$$a \quad a + d \quad a + 2d \quad a + 3d \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ a + (n - 1)\,d$$

für die geometrische

$$a \quad ea \quad e^2a \quad e^3a \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ e^{(n-1)}\,.\,a$$

wo a das erste Glied und n die Anzahl der Glieder ist. Das d in der arithmetischen Reihe wird die Differenz der Reihe, und das e in der geometrischen Reihe der Exponent der Reihe genannt.

§. 108. In der arithmetischen Reihe ist die Summe des ersten und letzten Gliedes

$$= a + a + (n - 1)\,d = 2a + (n - 1)\,d$$

die Summe des 2ten und 2tletzten

$$= a + d + a + (n - 2)\,d = 2a + (n - 1)\,d$$

die Summe des 3ten und 3tletzten

$$= a + 2d + a + (n - 3)\,d = 2a + (n - 1)\,d$$

also allgemein die Summe jeder zwey Glieder, die gleichweit vom Anfange und vom Ende stehen, $= 2a + (n - 1)\,d$. Diese Summe kommt also halb so oft vor, als die Zahl der Glieder beträgt. Bezeichnet man daher die Summe von n Gliedern einer arithmetischen Reihe mit S, so hat man allgemein

$$S = \frac{1}{2}\,n\,(2a + [n - 1]\,d)$$

§. 109. Nennt man das letzte Glied u, so ist

$$u = a + (n - 1)\,d$$

§. 110. Für die geometrische Reihe haben wir

$$S = a + ea + e^2a + e^3a \ldots\ldots + e^{n-2}a + e^{n-1}a$$

also auch (Ax)

$$eS = ea + e^2a + e^3a + e^4a \ldots\ldots + e^{n-1}a + e^na$$

folglich

$$eS - S = e^na - a.$$

Der erste Ausdruck nämlich sagt weiter nichts als: die Summe einer geometrischen Reihe ist = der Summe aller ihrer Glieder. Der zweyte Ausdruck ist entstanden, indem wir Gleiches mit Gleichem, (nämlich auf beyden Seiten des Gleichheitszeichens durchaus mit e) multiplicirt haben; den dritten endlich erhält man, indem man den ersten Ausdruck vom zweyten subtrahirt, da Gleiches von Gleichem subtrahirt wieder Gleiches gibt. Bey dieser Subtraction haben sich die $n-1$ letzten Glieder der ersten Reihe sämmtlich gegen die $n-1$ ersten Glieder der zweyten Reihe aufgehoben, und es blieb bloß noch

$$eS - S = e^n a - a$$

oder

$$(e-1) S = (e^n - 1) a$$

daher (Ax.)

$$S = \frac{e^n - 1}{e - 1} \cdot a$$

§. 110. Für die geometrische Reihe ist

$$u = e^{n-1} a$$

Von den Logarithmen.

§. 111. Wenn man zwey Reihen, eine arithmetische, die mit Null und eine geometrische, die mit 1 anfängt, zusammen stellt, so heißen die Glieder der arithmetischen Reihe Logarithmen der zugehörigen Glieder der geometrischen Reihe.

Es werden z. B. die Reihen

0	1	2	3	4	5	. . . . .
1	2	4	8	16	32	. . . . .

zusammen gestellt, so heißt 3 der Logarithme von 8; 5 der Logarithme von 32, u. s. w., welches man kürzer auf folgende Art ausdrückt:

$$3 = \log. 8 \text{ oder auch } 3 = l.\ 8$$

u. s. w.

§. 112. Eine solche Zusammenstellung, worin die Differenz der arithmetischen und der Exponent der geometrischen Reihe be=

stimmte Zahlen sind, heißt ein Logarithmensystem. Der allgemeine Ausdruck für jedes Logarithmensystem, ist

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & d & 2d & 3d & 4d & 5d & 6d & \ldots\ldots \\ 1 & e & e^2 & e^3 & e^4 & e^5 & e^6 & \ldots\ldots \end{array}$$

Hier ist z. B.

$$4d = \log.\ e^4$$

§. 113. Da jede e und d, die zusammen gehören, mit denselben Zahlen behaftet sind, und da man, um Potenzen mit Potenzen derselben Zahl zu multipliciren oder zu dividiren, nur die Exponenten der Potenzen zu addiren und zu subtrahiren, und, um Potenzen auf höhere Potenzen zu erheben oder aus ihnen Wurzeln auszuziehen, nur die Exponenten zu multipliciren oder zu dividiren braucht (§. 55, 56 und 57); so ergibt sich daraus der wichtige Gebrauch der Logarithmen zur Abkürzung der Rechnung. Denn

§. 114. a) Es ist

$$e^2 \,.\, e^4 = e^6$$

und

$$2d + 4d = 6d$$

Soll man also zwey Zahlen mit einander multipliciren, so suche man ihre Logarithmen, addire diese, und suche zu dem neuen Logarithmen wieder die Zahl.

§. 115. b) Es ist

$$\frac{e^5}{e^3} = e^2$$

und

$$5d - 3d = 2d$$

Soll man also zwey Zahlen durch einander dividiren, so subtrahire man ihre Logarithmen von einander, so erhält man den Logarithmen des Quotienten.

§. 116. c) Es ist

$$(e^2)^3 = e^6$$

und

$$2d \times 3 = 6d$$

Soll man also eine Zahl auf die nte Potenz erheben, so multiplicire man ihren Logarithmen mit n, so erhält man den Logarithmen der verlangten Potenz.

§. 117. d) Es ist

$$\sqrt[2]{e^6} = e^{\frac{6}{2}} = e^3 \text{ (§. 63)}$$

und

$$\frac{6d}{2} = 3d$$

Soll man also die nte Wurzel aus einer Zahl ziehen, so dividire man ihren Logarithmen durch n und man erhält den Logarithmen der verlangten Wurzel.

§. 118. Das gemeingebräuchliche Logarithmensystem ist aus folgenden Reihen zusammen gesetzt:

0	1	2	3	4	5	. . . . . .
1	10	100	1000	10000	100000	. . . .

Hier fehlen die Logarithmen aller Zahlen von 2 bis 9, von 11 bis 99, von 101 bis 999 u. s. w. Diese sind erst auf eine mühsame Weise eingeschaltet worden.

§. 119. Eine solche Einschaltung zu bewerkstelligen, kann der Satz angewandt werden, daß

$$\log a + \log b = \log ab \text{ (§. 113)}$$

und

$$\frac{\log a + \log b}{2} = \log \sqrt{(ab)} \text{ (§. 117)}$$

ist. Soll z. B. für das gemeine Logarithmensystem der log 5 eingeschaltet werden; so fällt 5 zwischen 1 und 10, und man hat

$$0 = \log 1$$
$$1 = \log 10$$

also

$$\frac{0 + 1}{2} = \log \sqrt{(1 \,.\, 10)}$$

oder

$$0{,}5 = \log 3{,}162277$$

Nun fällt 5 zwischen 3,162277 und 10; man berechnet also von Neuem

$$\frac{0{,}5 + 1}{2} = \log \sqrt{(3{,}162277 \times 10)}$$

oder

$$0{,}75 = \log 5{,}623413$$

Ferner fällt 5 zwischen 3,162277 und 5,623413; man berechnet daraus von Neuem

$$\frac{0{,}5 + 0{,}75}{2} = \log \sqrt{(3{,}162277 \times 5{,}623413)}$$

oder

$$0{,}625 = \log 4{,}216964$$

Auf eine ähnliche Art berechnet man ferner

$$0{,}6875 = \log 4{,}869674$$

$$0{,}71875 = \log 5{,}232991$$

u. s. w.

Indem man diese Rechnung immer weiter fortsetzt, nämlich immer die nächste Zahl unter 5 mit der nächsten Zahl über 5 multiplicirt, und aus dem Product die Quadratwurzel zieht; so wird durch jede neue Operation die Zahl 5 in immer engere Gränzen eingeschlossen, bis sich endlich (nach langwieriger Rechnung) die nächst kleinere und die nächst größere Zahl, so wie auch ihre Logarithmen, so wenig von einander unterscheiden, daß beyde Zahlen für die Zahl 5 und ihre Logarithmen für den Logarithmen der Zahl 5 gelten können.

§. 120. Durch solche Einschaltungen hat sich die ursprüngliche geometrische Reihe

1 10 100 1000 etc.

in die arithmetische

1 2 3 4 5 etc.

verwandelt, und die ursprünglich arithmetische

0 1 2 3 4 etc.

ist ebenfalls ganz unkenntlich geworden. Das thut aber bey der Anwendung der Logarithmen auf die Rechnungen nichts zur Sache.

Algebra.

1) Von den Gleichungen überhaupt.

§. 121. Jede Zusammenstellung zweyer gleichen Ausdrücke heißt eine **Gleichung**. So gehören die Proportionen, als Zusammenstellung zweyer gleichen Quotienten, zu den Gleichungen.

Besonders aber gehören solche Fälle hierher, wo in einem der beyden gleichen Ausdrücke, oder auch in beyden zugleich,

Größen vorkommen, deren Werth man noch nicht kennt, indem dabey verlangt wird, den Werth dieser unbekannten Größen heraus zu finden.

Anmerkung. Solche unbekannte Größen werden meistens durch die letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet.

§. 122. Den Werth der unbekannten Größe aus einer Gleichung herausfinden, heißt die Gleichung auflösen. Derjenige Theil der Arithmetik, welcher sich mit der Auflösung der Gleichungen beschäftigt, heißt die Algebra.

§. 123. Wenn man mit beyden gleichen Theilen einer Gleichung gleiche Aenderungen vornimmt, so erhält man wieder eine richtige Gleichung (Ax.), welche sich von der vorigen nur der Form nach unterscheidet. Dem Werth der unbekannten Größe nach aber bleibt sie mit der vorigen ganz dieselbe Gleichung.

§. 124. Nach der Anzahl der unbekannten Größen, die in einer Gleichung vorkommen, theilt man die Gleichungen ein in Gleichungen mit einer, mit zweyen, mit dreyen, u. s. w. unbekannten Größen.

§. 125. Eine Gleichung heißt vom ersten Grade oder eine einfache Gleichung, wenn in ihr die unbekannte Größe bloß von der ersten Potenz vorkommt. Steht in ihr die unbekannte Größe von einer höhern Potenz, so heißt sie eine höhere Gleichung, und zwar vom zweyten, dritten, vierten u. s. w. Grade, je nachdem die höchste in der Gleichung vorkommende Potenz der unbekannten Größe die zweyte, dritte, vierte u. s. w. ist.

§. 126. Da aber (nach §. 123) dieselbe Gleichung verschiedene Formen annehmen kann; da sie z. B. in der einen Gestalt eine Gleichung vom ersten, in einer andern Gestalt eine Gleichung vom sechsten Grade seyn könnte (wie $x + 5 = 12$ und $x^6 + 5x^5 = 12x^5$): so muß festgesetzt werden, bey welcher Form der Grad der Gleichung bestimmt werde.

§. 127. Eine Gleichung ist (im Sinn des Satzes §. 126) von der gehörigen Form:

1) wenn die unbekannte Größe nirgends im Divisor vorkommt,

2) nirgends in Parenthese,

3) nirgends unter dem Wurzelzeichen,

4) nicht in allen Gliedern der Gleichung.

5) Wenn sie nicht durch bloße Addition oder Subtraction wegfällt.

§. 128. Um eine Gleichung auf die gehörige Form zu bringen, ist die allgemeine Regel diese: man nehme diejenigen Aenderungen mit ihr vor (§. 123), wodurch sie die gehörige Form erhält, nämlich:

1) wenn die unbekannte Größe im Divisor vorkommt, so schaffe man den ganzen Divisor weg, indem man alle Glieder der Gleichung mit diesem Divisor multiplicirt (§. 19).

2) Wenn die unbekannte Größe in Parenthese steht, so soll der Ausdruck innerhalb der Klammern als ein Ganzes betrachtet und mit demselben irgend eine arithmetische Operation vorgenommen werden. Man schaffe die Parenthese dadurch weg, daß man die verlangte Operation wirklich vornimmt.

3) Wenn die unbekannte Größe unter einem Wurzelzeichen steht, so erhebe man beyde Theile der Gleichung auf diejenige Potenz, wodurch das Wurzelzeichen wegfällt.

4) Kommt die unbekannte Größe in allen Gliedern der Gleichung vor, so dividire man alle Glieder der Gleichung durch die niederste in der Gleichung vorkommende Potenz der unbekannten Größe.

5) Glieder, die sich durch Addition oder Subtraction gegenseitig aufheben, streiche man durch.

§. 129. Die Ausführung der Forderungen des Satzes (§. 128) ist leicht. Fast nur allein die Wegschaffung des Wurzelzeichens bedarf für einen gewissen Fall einer näheren Erläuterung. Kommen nämlich auf derjenigen Seite der Gleichung, auf welcher die unbekannte Größe unter dem Wurzelzeichen steht, neben dem Wurzelzeichen noch andere Glieder vor, so wird durch die bloße Potenzerhebung das Wurzelzeichen nie wegfallen. Es sey z. B.

$$a + \sqrt{x} = b$$

so wäre durch Erhebung aufs Quadrat

$$a^2 + 2a\sqrt{x} + x = b^2$$

also das Wurzelzeichen nicht weggefallen.

In dergleichen Fällen muß man die gegebene Gleichung so ändern, daß das Wurzelzeichen auf die eine Seite der Gleichung allein zu stehen komme. Aus dem obigen Beyspiele

$$a + \sqrt{x} = b$$

wird

$$\sqrt{x} = b - a$$

und durch Erhebung aufs Quadrat

$$x = b^2 - 2ab + a^2$$

2) Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade.

§. 130. Eine Gleichung vom ersten Grade mit **einer** unbekannten Größe aufzulösen.

Man nehme mit beyden gleichen Theilen der Gleichung nach und nach solche Aenderungen vor, daß immer einfachere Gleichungen entstehen (vgl. §. 123), bis endlich auf der einen Seite der Gleichung die unbekannte Größe für sich allein, und auf der andern Seite der Werth der unbekannten Größe zu stehen kommt.

Die Beurtheilung, ob die nachfolgende Gleichung einfacher als die vorhergehende sey, und was für Veränderungen vorgenommen werden können, um jedesmal eine einfachere Gleichung zu erhalten, kann füglich dem Verstande eines Jeden überlassen bleiben.

Beyspiele:

1)

$$\frac{3x - 1}{4} = 5$$

man multiplicire beyde gleiche Theile mit 4, so wird

$$3x - 1 = 20$$

man addire zu beyden Theilen 1, so wird

$$3x = 21$$

man dividire beyde Theile durch 3, so wird

$$x = 7$$

Probe:

$$3 \cdot 7 \quad = 21$$
$$3 \cdot 7 - 1 = 20$$
$$\frac{3 \cdot 7 - 1}{4} = 5$$

2)
$$6\,(x - 5) + 7 = 25$$
man subtrahire von beyden Theilen 7, so wird
$$6\,(x - 5) = 18$$
man dividire beyde Theile durch 6, so wird
$$x - 5 = 3$$
man addire zu beyden Theilen 5, so wird
$$x = 8$$

3)
$$60 - 3x = 4\,(17 - x)$$
man schaffe das Parenthesezeichen weg, so wird
$$60 - 3x = 68 - 4x$$
man addire zu beyden Theilen 4x, so wird
$$60 + x = 68$$
man subtrahire von beyden Theilen 60, so bleibt
$$x = 8$$

4)
$$\frac{x - 19}{6} - 2 = \frac{x + 5}{12}$$
man multiplicire beyde Theile mit 12, so wird
$$2x - 38 - 24 = x + 5$$
oder
$$2x - 62 = x + 5$$
man subtrahire von beyden Theilen x, so wird
$$x - 62 = 5$$
man addire zu beyden Theilen 62, so wird
$$x = 67$$

5)
$$\frac{4}{5}\left[\frac{6}{7}\left(\frac{2}{3}x - 60\right) - 40\right] - 12 = 100$$
$$\frac{4}{5}\left[\frac{6}{7}\left(\frac{2}{3}x - 60\right) - 40\right] = 112$$
$$\frac{6}{7}\left(\frac{2}{3}x - 60\right) - 40 = 140$$

$$\frac{6}{7}\left(\frac{2}{3}x - 60\right) = 180$$

$$\frac{2}{3}x - 60 = 210$$

$$\frac{2}{3}x = 270$$

$$x = 405$$

6)

$$(x + 3)^2 = x^2 + 525$$

$$\begin{array}{l} x + 3 \\ x + 3 \\ \hline x^2 + 3x \\ \quad + 3x + 9 \\ \hline x^2 + 6x + 9 = x^2 + 525 \end{array}$$

$$6x + 9 = 525$$

$$6x = 516$$

$$x = 86$$

7)

$$f\left(\frac{ax - b}{c} - dx\right) = x$$

man schaffe das Parenthesezeichen weg, so wird

$$\frac{afx - bf}{c} - dfx = x$$

man multiplicire beyde Theile mit c, so wird

$$afx - bf - cdfx = cx$$

man addire zu beyden Theilen bf — cx, so wird

$$afx - cdfx - cx = bf$$

oder

$$(af - cdf - c)\,x = bf$$

man dividire beyde Theile durch af — cdf — c, so wird

$$x = \frac{bf}{af - cdf - c}$$

Ex. in Zahlen. Es sey $a = 12$, $b = 87$, $c = 6$, $d = \frac{1}{2}$, $f = 20$, so ist

$$x = \frac{87 \,.\, 20}{12 \,.\, 20 - 6 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, 20 - 6} = \frac{1740}{240 - 60 - 6}$$

$$= \frac{1740}{174} = 16$$

§. 131. Eine Gleichung mit zwey unbekannten Größen gibt unzählige Werthe für die beyden unbekannten Größen. Es sey z. B.

$$7x = 3 + y$$

so ist

$$x = \frac{3 + y}{7}$$

Je nachdem man hier y annimmt, ändert sich auch der Werth für x.

$$\text{Für } y = 1 \text{ wird } x = \frac{4}{7}$$

$$\text{für } y = 2 \text{ wird } x = \frac{5}{7}$$

u. s. w.

Obige Gleichung gibt ferner

$$y = 7x - 3$$

$$\text{Für } x = 1 \text{ wird } y = 4$$

$$\text{für } x = 2 \text{ wird } y = 11$$

u. s. w.

§. 132. Kommt aber noch eine zweyte Gleichung zwischen den beyden unbekannten Größen hinzu, und wird dabey vorausgesetzt, daß beyde unbekannte Größen in beyden Gleichungen die nämlichen Werthe haben, obgleich diese Werthe noch nicht bekannt sind, so sind dadurch beyde unbekannten Größen bestimmt. Es sey z. B. außer der obigen Gleichung noch

$$2x = y - 37$$

also

$$x = \frac{y - 37}{2}$$

Da beyde Werthe für x einander gleich sind, so ist

$$\frac{3 + y}{7} = \frac{y - 37}{2}$$

also

$$6 + 2y = 7y - 259$$

$$265 = 5y$$

$$53 = y$$

Nun ist

$$x = \frac{3+y}{7} = \frac{3+53}{7} = \frac{56}{7} = 8$$

Anmerkung. Die zweyte Gleichung darf durch keine Aenderung von der Art des §. 123 in die erste übergehen, indem z. B.

$$14x = 6 + 2y$$

als keine von

$$7x = 3 + y$$

verschiedene Gleichung betrachtet werden kann.

§. 133. Im Allgemeinen, wenn mehr unbekannte Größen als zusammen gehörige Gleichungen sind, so bleiben die Werthe der unbekannten Größen unbestimmt. Damit dieselben bestimmt seyen, werden immer eben so viele Gleichungen als unbekannte Größen erfordert.

§. 134. Aus dem Obigen ergibt sich die Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren unbekannten Größen von selbst. Es kommt hier immer darauf an, eine unbekannte Größe nach der andern wegzuschaffen (oder zu eliminiren), wodurch man am Ende nur eine Gleichung mit einer unbekannten Größe erhält, die man nach §. 130 auflöst.

Hat man den Werth der einen unbekannten Größe gefunden, so erhält man mittelst desselben durch gehörige Substitutionen die Werthe der übrigen.

Beyspiele.

1)

$$3x + 4y = 183 \text{ und } 4x + 3y = 167$$

$$3x = 183 - 4y \qquad 4x = 167 - 3y$$

$$x = \frac{183 - 4y}{3} \qquad x = \frac{167 - 3y}{4}$$

Man setze die beyden Werthe für x einander gleich, so wird

$$\frac{183 - 4y}{3} = \frac{167 - 3y}{4}$$

man multiplicire beyde Theile mit 3 . 4, so wird

$$732 - 16y = 501 - 9y$$

ferner

$$231 = 7y$$

$$33 = y$$

daher

$$x = \frac{167 - 3y}{4} = \frac{167 - 99}{4} = \frac{68}{4} = 17$$

Probe: $3 . 17 + 4 . 33 = 51 + 132 = 183$

und

$$4 . 17 + 3 . 33 = 68 + 99 = 167$$

2)

$$x + y = a \text{ und } x - y = b$$

man addire beyde Gleichungen, da Gleiches zu Gleichem addirt Gleiches gibt, so wird dadurch y eliminirt, und man erhält folgendes:

$$\begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = b \\ \hline 2x \quad = a + b \end{array}$$

also

$$x = \frac{a + b}{2}.$$

Eben so subtrahire man beyde Gleichungen von einander, wodurch x eliminirt wird, nämlich

$$\begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = b \\ \hline 2y \quad = a - b \end{array}$$

so erhält man

$$y = \frac{a - b}{2}$$

3)

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{70}$ b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{84}$ c) $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{140}$

Subtrahirt man die Gleichung b von a, so erhält man

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{70} - \frac{1}{84}$$

oder

$$\text{d) } \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{420}$$

Addirt man hierzu die Gleichung c, so erhält man

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{140} + \frac{1}{420}$$

oder

$$e)\ \frac{2}{y} = \frac{4}{420} = \frac{2}{210}$$

folglich

$$y = 210$$

Nun hat man aus der Gleichung a

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{70} - \frac{1}{y} = \frac{1}{70} - \frac{1}{210} = \frac{2}{210} = \frac{1}{105}$$

daher

$$x = 105$$

ferner aus der Gleichung d

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{y} - \frac{1}{420} = \frac{1}{210} - \frac{1}{420} = \frac{1}{420}$$

daher

$$z = 420$$

3) Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade, oder der quadratischen Gleichungen.

§. 135. Höhere Gleichungen (§. 125) heißen reine, wenn in ihnen nur die höchste Potenz der unbekannten Größe vorkommt; hingegen vermischte, wenn neben der höchsten Potenz noch niedrigere Potenzen der unbekannten Größe vorkommen.

Bekannte Größen, die mit unbekannten multiplicirt sind, heißen Coefficienten der unbekannten Größen.

§. 136. Eine reine quadratische Gleichung aufzulösen.

Man behandle sie als eine Gleichung vom ersten Grade, indem man den Werth für das Quadrat der unbekannten Größe nach §. 130 sucht. Hierauf ziehe man die Quadratwurzel aus.

Beyspiel.

$$\frac{x^2}{4} = 20 - \frac{100 - x^2}{9}$$

$$9x^2 = 720 - 400 + 4x^2$$

$$5x^2 = 320$$

$$x^2 = 64$$

$$x = \pm 8$$

Anmerkung. Eben so läßt sich eine jede reine höhere Gleichung vom nten Grade auflösen. Man suche den Werth für x^n und ziehe nachher die nte Wurzel aus.

§. 137. Eine vermischte quadratische Gleichung aufzulösen.

a. Man gebe der quadratischen Gleichung die Form

$$x^2 \pm \alpha x = \pm \beta$$

was sich jedesmal leicht bewerkstelligen läßt.

b. Man erinnere sich, daß

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

ist (§. 48 b. Ex. 1 und 2). Nimmt man nun

$$x^2 = a^2$$

und

$$\alpha x = 2ab$$

so ist

$$\alpha = 2b$$

also

$$b = \frac{1}{2}\alpha$$

und

$$b^2 = \frac{1}{4}\alpha^2$$

c. Addirt man also auf beyden Seiten $\frac{1}{4}\alpha^2$, d. h. das Quadrat des halben Coefficienten von x, so erhält man auf der linken Seite der Gleichung das vollständige Quadrat von $x \pm \frac{1}{2}\alpha$. Man hat nämlich jetzt

$$x^2 \pm \alpha x + \frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{1}{4}\alpha^2 \pm \beta$$

d. Zieht man auf beyden Seiten die Quadratwurzel aus, so erhält man

$$x \pm \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\alpha^2 \pm \beta\right)}$$

wo $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\alpha^2 \pm \beta\right)}$ sowohl positiv als negativ seyn kann (nach §. 75).

e. Man hat also endlich

$$x = \mp \frac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\alpha^2 \pm \beta\right)}$$

Beyspiele:

1) Es sey

$$x^2 + 3x = 88$$

so ist $\alpha = 3$, $\beta = 88$, also

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4} + 88\right)} = -\frac{3}{2} \pm \frac{19}{2} = \begin{cases} + 11 \\ - 8 \end{cases}$$

2) Es sey

$$\frac{4680}{x} + 195 = \frac{4680}{x-2}$$

so ist

$$4680x - 9360 + 195x^2 - 390x = 4680x$$
$$195x^2 - 390x = 9360$$
$$x^2 - 2x = 48$$

also $\alpha = 2$, $\beta = 48$ und

$$x = 1 \pm \sqrt{(1 + 48)} = 1 \pm 7 = \begin{cases} + 8 \\ - 6 \end{cases}$$

3) Es sey

$$x + y = 29 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = 425$$

so ist

$$x = 29 - y \qquad x^2 = 425 - y^2$$
$$x^2 = 841 - 58y + y^2$$

daher

$$841 - 58y + y^2 = 425 - y^2$$
$$2y^2 - 58y = -416$$
$$y^2 - 29y = -208$$

also $\alpha = 29$, $\beta = 208$ und

$$y = \frac{29}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{841}{4} - 208\right)} = \frac{29}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$$
$$= \frac{29}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} + 16 \\ + 13 \end{cases}$$

daher

$$x = 29 - y = \begin{cases} + 13 \\ + 16 \end{cases}$$

4) Es sey

$$x^2 - 4x = 6$$

so ist $\alpha = 4$, $\beta = 6$ und

$$x = 2 \pm \sqrt{(4 + 6)} = 2 \pm \sqrt{10} = 2 \pm 3{,}1622\ldots$$
$$= \begin{cases} + 5{,}1622\ldots \\ - 1{,}1622\ldots \end{cases}$$

5) Es sey

$$x^2 - 2x = -10$$

so ist $\alpha = 2$, $\beta = 10$ und

$$x = 1 \pm \sqrt{(1 - 10)} = 1 \pm \sqrt{-9}$$

In der quadratischen Gleichung hat also die unbekannte Größe jedesmal zwey Werthe, die beyde der Gleichung Genüge thun. In dem 5ten Beyspiele sind diese beyden Werthe unmögliche Größen (§. 75).

Anmerkung. Die Algebra findet in den verschiedenen Theilen der Mathematik (Arithmetik, Geometrie, Mechanik u. s. w.) vielfache Anwendung. In jedem Falle aber sind die verschiedenartigen Aufgaben, welche mittelst der Algebra aufgelöst werden können, von den Gleichungen selbst, die zur Auflösung jener Aufgaben dienen, wohl zu unterscheiden.

Ob wir zur Auflösung einer solchen Aufgabe uns gerade des leichteren algebraischen Weges bedienen wollen oder nicht, hängt meist von unserer Willkühr ab; und wenn wir die Algebra anwenden, so steht es wieder bey uns, wie viele unbekannte Größen wir in die Gleichungen aufnehmen wollen. Die Art, wie die Gleichungen entstehen, geht die Algebra nichts an; die Algebra beschränkt sich bloß auf die Auflösung der vorhandenen Gleichungen.

Wer die Algebra zur Auflösung von Aufgaben anwenden will, muß gleichsam die Sprache der Aufgabe in die Sprache der Algebra übersetzen. Ist nun der Inhalt der Aufgabe gehörig durch Gleichungen ausgedrückt, so löst die Algebra die Gleichungen auf, ohne sich weiter um den Gegenstand der Aufgabe zu bekümmern. Erst, nachdem aus den Gleichungen die Werthe der unbekannten Größen heraus gefunden worden, so werden diese nun wieder aus der algebraischen Sprache in die Sprache der Aufgabe zurück übersetzt.

Allgemeine Regeln, die gehörigen Gleichungen zu finden, lassen sich nicht angeben. Jeder besondere Fall erfordert besondere Ueberlegung, und, zumal wenn von Aufgaben aus der Geometrie und angewandten Mathematik die Rede ist, die nöthigen Vorkenntnisse aus diesen Fächern. Im Allgemeinen kann nur bemerkt werden, daß man, um eine Gleichung zu erhalten, zwey verschiedene arithmetische Ausdrücke für dieselbe Sache suche, dem Inhalt der Aufgabe gemäß, und diese beyden Ausdrücke einander gleich setze.

II. Geometrie.

A. Elementar-Geometrie.

Man pflegt die Geometrie in zwey Theile abzusondern, je nachdem die Untersuchungen sich bloß auf die Lage einer einzigen Ebene beschränken, oder in mehreren Ebenen zugleich vor sich gehen. Jenen nennt man Planimetrie, diesen Stereometrie.

1. Planimetrie.

Von der geraden Linie, den Winkeln und Parallellinien.

§. 1. Eine Linie, welche überall dieselbe Richtung hat, heißt eine gerade Linie.

§. 2. Zwey gerade Linien, welche beyde einerley Richtung haben, nennt man Parallellinien.

§. 3. Die Abweichung zweyer geraden Linien, welche von einem Punkte nach verschiedener Richtung ausgehen, heißt ein Winkel, wie BAC.

AB und AC heißen die Schenkel und A der Scheitelpunkt des Winkels.

§. 4. Ein Winkel ist also desto größer, je weiter seine Schenkel von einander abweichen. Auf die Größe der Schenkel kommt es nicht an.

§. 5. Von den Schenkeln des Winkels sagt man, daß sie gegen den Scheitel hin convergiren, vom Scheitelpunkt weg aber divergiren. Jenes ist gleichbedeutend mit zusammen neigen, dieses mit abweichen.

Ein Winkel ist also auch desto größer, je weniger sich der eine Schenkel gegen den andern neigt.

§. 6. Zwey Winkel, welche einen Schenkel mit einander gemein haben, und deren beyde andern Schenkel in gerader Linie liegen, heißen Nebenwinkel.

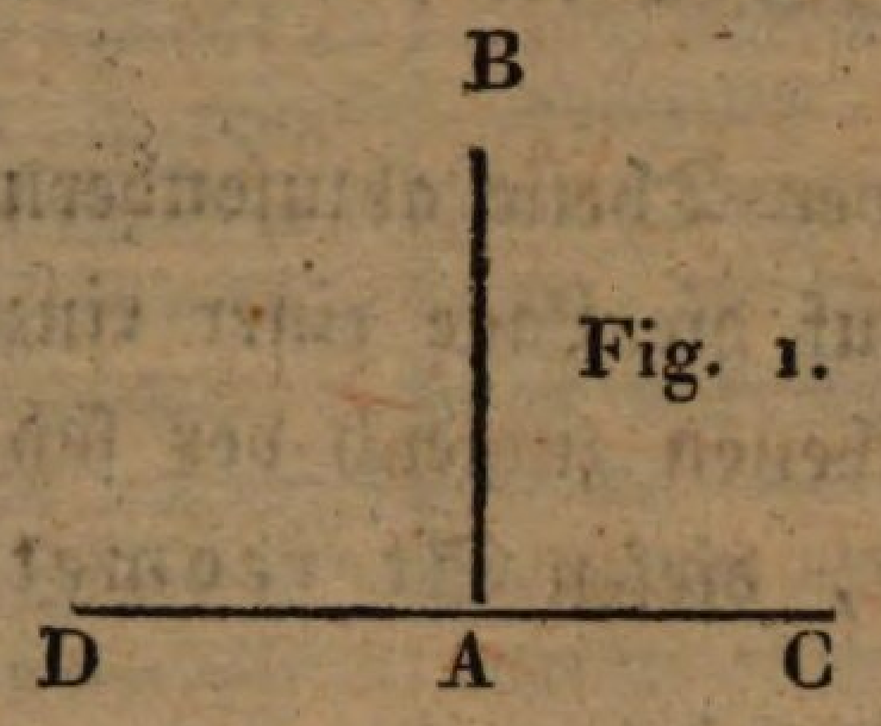


Fig. 1.

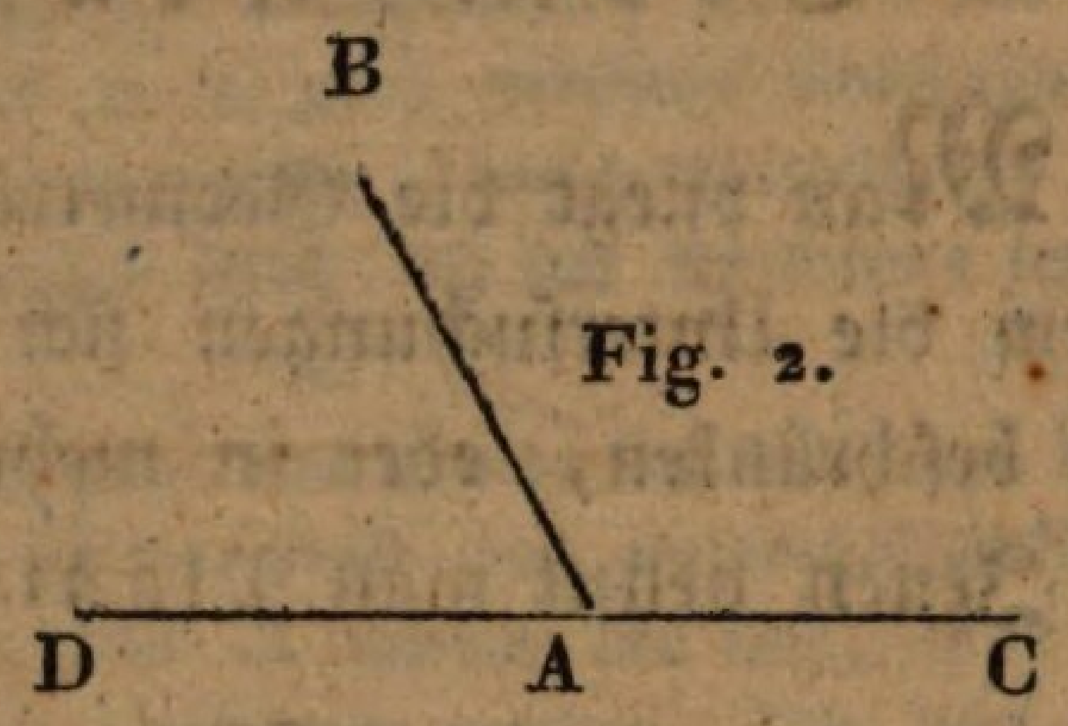


Fig. 2.

BAD ist der Nebenwinkel von BAC und BAC der Nebenwinkel von BAD.

§. 7. Sind zwey Nebenwinkel einander gleich, so heißt jeder derselben ein rechter Winkel, wie Fig. 1. Von den Schenkeln des rechten Winkels sagt man: ein jeder stehe auf dem andern senkrecht oder perpendiculär.

§. 8. Sind zwey Nebenwinkel einander ungleich, so heißen sie schiefe Winkel, und zwar der größere ein stumpfer, wie BAC, und der kleinere ein spitzer Winkel, wie BAD (Fig. 2).

§. 9. Aus §. 7 folgt:

a) Alle rechten Winkel sind unter einander gleich.

§. 10. b) Die Summe zweyer Nebenwinkel ist allemal = 2 Rechten.

§. 11. c) Eben so ist die Summe aller Winkel, die neben einander, und deren beyde äußern Schenkel in gerader Linie liegen, = 2 R.

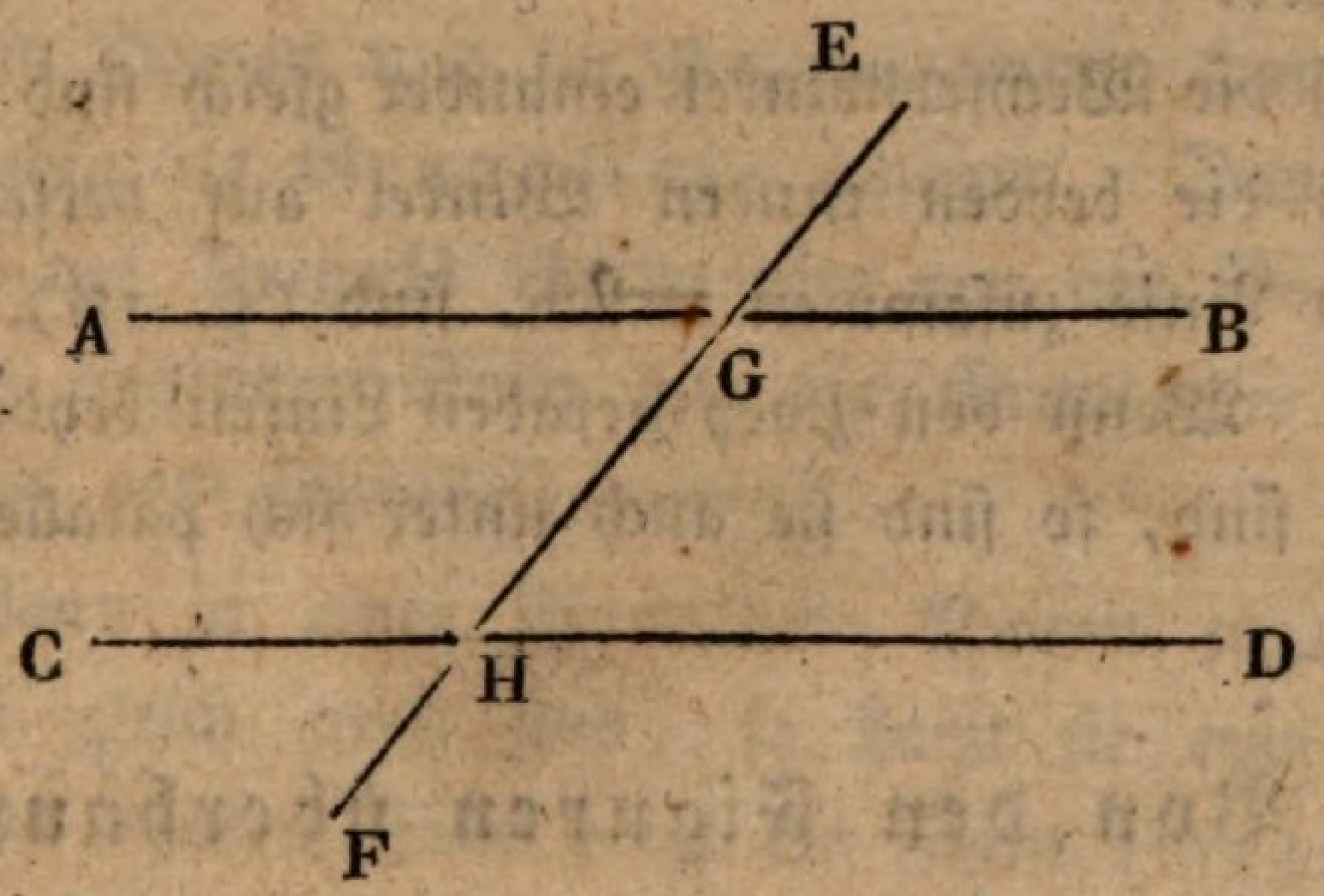
§. 12. d) Alle Winkel rings um einen Punkt herum sind zusammen = 4 R.

§. 13. Verlängert man die Schenkel des Winkels BAC geradlinicht über den Scheitelpunkt A hinaus, so heißt EAD der Scheitel- oder Vertical-Winkel von BAC.

Eben so sind BAD und EAC Scheitelwinkel von einander.

§. 14. Jede zwey Scheitelwinkel sind einander gleich.

§. 15. Werden zwey Parallellinien AB und CD von einer dritten geraden Linie EF durchschnitten; so heißen Winkel wie EGB und EHD correspondirende Winkel, und Winkel, wie AGH und GHD, Wechselswinkel von einander.



§. 16. Da Parallellinien gerade Linien sind, welche, die eine wie die andere, gleiche Richtung haben (§. 2); so folgt, daß irgend eine dritte gerade Linie, wie EF, welche die Parallellinien durchschneidet, gegen beyde die gleiche Neigung habe, oder daß der Winkel EGB dem Winkel EHD gleich sey (§. 3 und 5).

Es sind also jede zwey correspondirende Winkel einander gleich.

§. 17. Jede zwey Wechselswinkel sind einander gleich.

Bew. Es ist

W. AGH = EGB (§. 14)

und

W. GHD = EGB (§. 16)

also (Ax.)

W. AGH = W. GHD

§. 18. Wenn zwey Linien parallel sind, so sind die beyden innern Winkel auf derselben Seite der schneidenden Linie zusammen = 2 R.

Bew. Es ist

AGH + AGE = 2 R. (§. 10)

und

$$AGE = CHG \quad (\S.\ 16)$$

also auch (Ax.)

$$AGH + CHG = 2\ R.$$

§. 19. Da durch einen Punkt außerhalb einer gegebenen geraden Linie nur eine gerade Linie möglich ist, welche mit der gegebenen parallel läuft, so ist das Parallelseyn zweyer geraden Linien bewiesen, sobald bewiesen ist, entweder

a) daß die correspondirenden Winkel einander gleich sind (§. 16); oder

b) daß die Wechselswinkel einander gleich sind (§. 17); oder

c) daß die beyden innern Winkel auf derselben Seite der schneidenden Linie zusammen = 2R. sind (§. 18).

§. 20. Wenn von zwey geraden Linien beyde derselben dritten parallel sind, so sind sie auch unter sich parallel.

Von den Figuren überhaupt.

§. 21. Eine von allen Seiten begränzte Fläche heißt eine Figur. Man theilt die Figuren in geradlinichte, krummlinichte und vermischtlinichte ein. Die ganze Gränze der Figur heißt ihr Umfang oder Perimeter. Dann unterscheidet man noch Seiten, Winkel, Ecken und Diagonallinien der Figur.

§. 22. Die geradlinichten Figuren theilt man nach der Zahl der Seiten in Dreyecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w. Man umfaßt sie auch unter dem gemeinschaftlichen Nahmen von Vielecken oder Polygonen.

§. 23. Die Dreyecke theilt man:

1) in Rücksicht auf die Seiten, in gleichseitige, gleichschenklichte und ungleichseitige Dreyecke, je nachdem sie drey gleiche, oder nur zwey gleiche, oder lauter ungleiche Seiten haben.

2) in Rücksicht auf die Winkel in rechtwinklichte, stumpfwinklichte und spitzwinklichte, je nachdem sie einen rechten, einen stumpfen oder lauter spitze Winkel haben.

Im rechtwinklichten Dreyeck unterscheidet man die Seiten in Hypotenuse und Katheten.

§. 24. Die Vierecke unterscheidet man in Quadrate, Rechtecke, Rhomben, Rhomboiden und solche, die keins von diesen vieren sind, oder Trapeze.

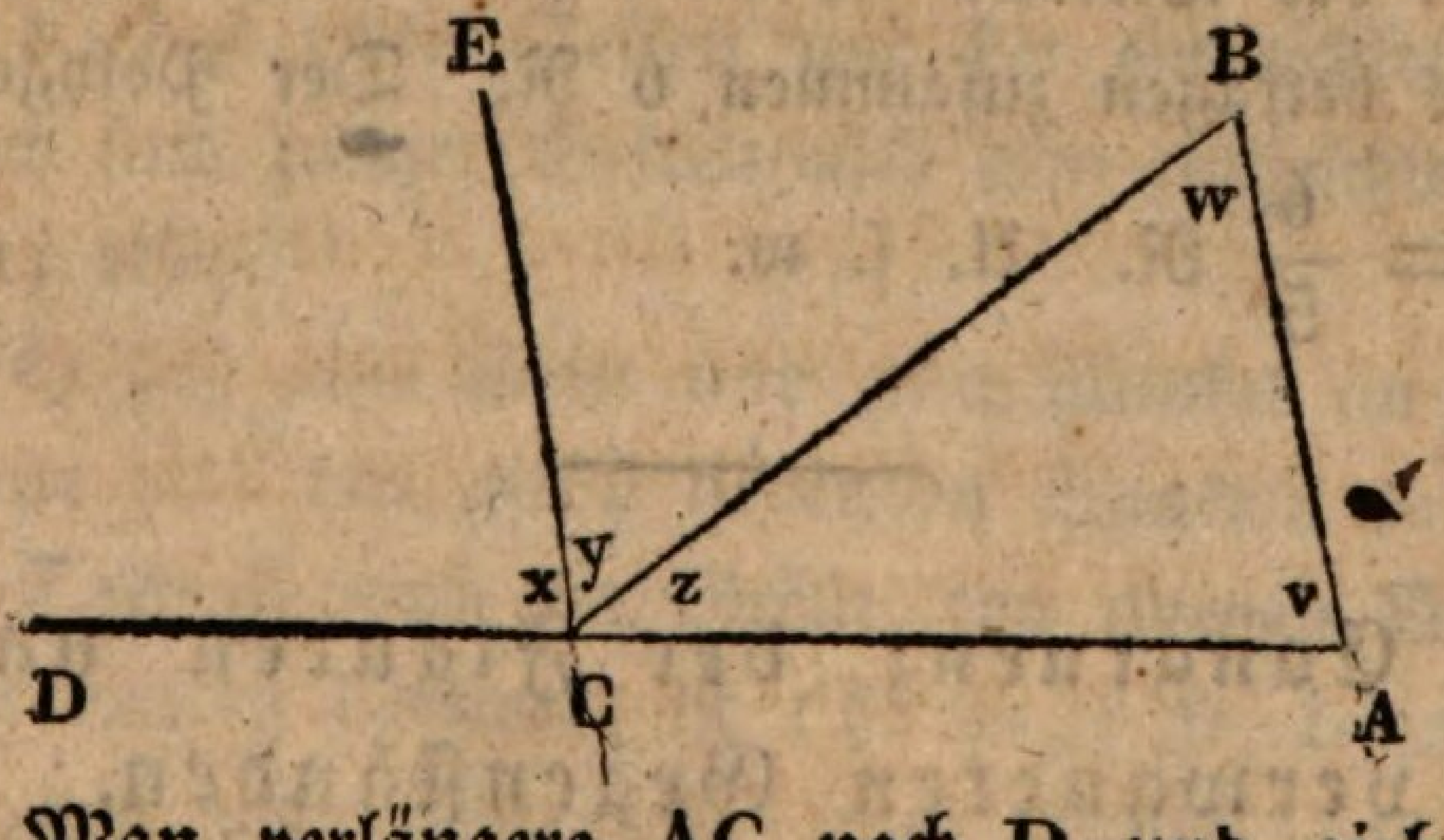
§. 25. Ein Viereck, dessen gegen über stehende Seiten einander parallel sind, heißt ein Parallelogramm. Sind in einem Viereck nur zwey Seiten einander parallel, so heißt es ein Parallel-Trapez.

§. 26. Im Dreyeck und im Parallelogramm kann man eine der Seiten beliebig als Grundlinie ansehen. Dann heißt ein Perpendikel aus des Dreyecks Spitze oder von des Parallelogrammes gegen über liegender Seite auf die Grundlinie die Höhe vom Dreyeck oder vom Parallelogramm.

§. 27. Wenn in einer Figur alle Seiten einander gleich und alle Winkel gleich groß sind, so heißt sie eine reguläre Figur; in jedem andern Falle heißt die Figur irregulär.

Bey einer regulären Figur wird der Winkel, den je zwey Seiten einschließen, der Polygonwinkel genannt.

§. 28. Die drey Winkel eines Dreyecks sind zusammen jedesmal = 2 R.



Bew. Man verlängere AC nach D und ziehe CE || AB, so ist

W. $x = v$ (§. 16)
W. $y = w$ (§. 17)
W. $z = z$ (Ax.)

also die drey Winkel des Dreyecks = den dreyen Winkeln um den Punkt C = 2 R. (§. 11).

Anmerkung. Statt zu sagen „ziehe CE∥AB" wäre richtiger gesagt worden: „denke sich CE∥AB gezogen." Das erste ist aber kürzer. ∥ ist das Zeichen für parallel. ♯ bedeutet gleich und parallel.

§. 29. Eben so ist x + y oder der W. DCB = v + w, d. h.

Der äußere Winkel eines Dreyecks ist = der Summe der beyden innern gegen über stehenden.

§. 30. Also ist auch der äußere Winkel eines Dreyecks größer als ein jeder der beyden innern gegen über stehenden.

§. 31. Wenn zwey Winkel eines Dreyecks gegeben sind, so läßt sich auch der dritte finden, indem man jene beyden von 2 R. abzieht. Und sind in zweyen Dreyecken zwey Winkel gleich, so ist es auch der dritte.

§. 32. Ein Dreyeck kann nie mehr als einen rechten, und nie mehr als einen stumpfen, noch weniger einen rechten und stumpfen Winkel zugleich enthalten.

§. 33. Der Polygonwinkel des Dreyecks ist = $\frac{2}{3}$ R.

§. 34. Anwendung davon auf mehrseitige Figuren: Die 4 Winkel eines jeden Vierecks betragen zusammen 4 R. Denn man kann das Viereck durch eine Diagonale in zwey Dreyecke zerlegen, deren 6 Winkel die 4 Winkel des Vierecks sind. Der Polygonwinkel des Vierecks ist = 1 R. — Die 5 Winkel eines jeden Fünfecks betragen zusammen 6 R. Der Polygonwinkel des Fünfecks ist = $\frac{6}{5}$ R. U. s. w.

Von der Congruenz der Figuren und damit verwandten Gegenständen.

§. 35. Figuren heißen congruent, wenn sie sich durch nichts, als durch ihre Lage, von einander unterscheiden.

Zwey congruente Figuren haben also nicht nur gleich viele Seiten und Winkel, sondern diese sind auch, wie sie in derselben Ordnung auf einander folgen, in der einen Figur so groß als in der andern.

§. 36. Congruente Figuren haben gleiche Größe und gleiche Gestalt. Wenn man sie auf einander legt, so decken sie sich.

§. 37. Wenn von einem Dreyeck die Lage der drey Ecken gegen einander bestimmt ist, so ist das ganze Dreyeck bestimmt. Denn zwischen den Ecken sind bestimmte gerade Linien, deren Lage sich nach der Lage der Ecken richtet, welche also bestimmte Winkel einschließen. Die Lage der drey Ecken des Dreyecks ist aber unter andern bestimmt:

a) durch die drey Seiten des Dreyecks, oder

b) durch zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel, oder

c) durch eine Seite und die beyden anliegenden Winkel.

In einem jeden dieser Fälle kann man die übrigen Stücke des Dreyecks nicht mehr nach Willkühr annehmen.

Anmerkung. Außer den drey angeführten Fällen gibt es noch sehr viele andere Fälle, in welchen ein Dreyeck durch einige Stücke desselben bestimmt wird, z. B., wenn man sich ein Perpendikel aus der Spitze auf die Grundlinie gezogen denkt, durch das Perpendikel und die beyden zugehörigen Abschnitte der Grundlinie. Im Allgemeinen kann man den Satz aufstellen, daß drey Data, worunter höchstens zwey Winkel sind, das Dreyeck seiner Gestalt und Größe nach bestimmen.

§. 38. Die Congruenz zweyer Dreyecke ist also bewiesen, sobald bewiesen ist:

a) daß die drey Seiten im einen gleich sind den drey Seiten im andern; oder

§. 39. b) daß zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel im einen gleich sind zweyen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel im andern; oder

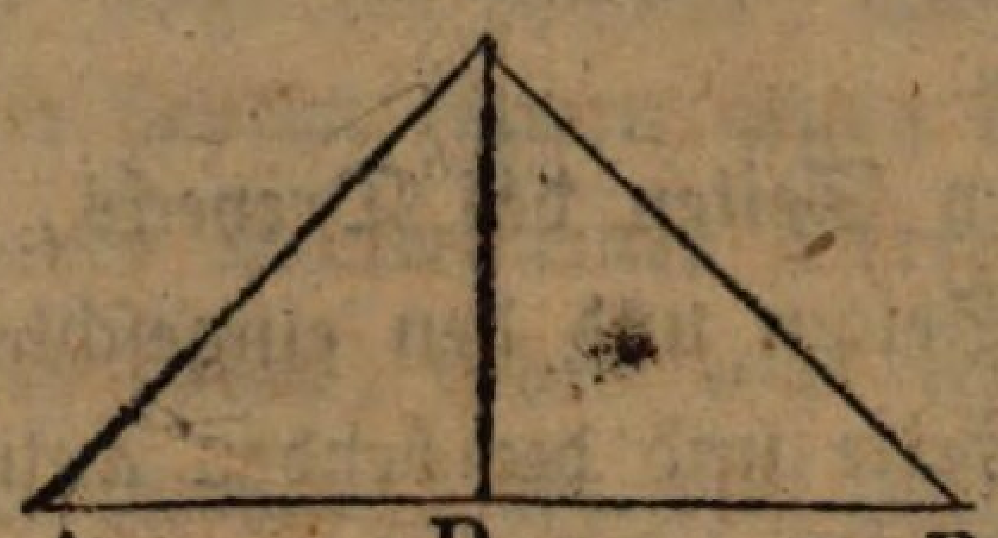
§. 40. c) daß eine Seite und zwey Winkel im einen gleich sind einer Seite und den gleich liegenden Winkeln im andern. — Denn da im Dreyeck durch die Größe von zweyen Winkeln auch die Größe des dritten bestimmt ist (§. 31); so kann man überhaupt sagen, daß eine Seite und zwey Winkel das Dreyeck bestimmen.

§. 41. In congruenten Dreyecken stehen den gleichen Seiten gleiche Winkel und den gleichen Winkeln gleiche Seiten gegen über.

§. 42. Die Congruenz zweyer mehrseitigen Figuren läßt sich im Allgemeinen dadurch beweisen, daß man beyde durch gleich

liegende Diagonallinien in Dreyecke theilt, und die Congruenz und gleichmäßige Lage der einzelnen auf einander folgenden Dreyecke darthut.

§. 43. Im gleichschenklichten Dreyeck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. — Grundlinie heißt hier nämlich, der Kürze wegen, die ungleiche Seite.



Bew. Man ziehe aus der Spitze C auf die Mitte der Grundlinie AB eine gerade Linie CD, so ist

AC = BC (Voraussetzung)
AD = BD (Construction)
CD = CD (Ax.)

also

ΔACD ≅ BCD (§. 38)

folglich

W. A = B (§. 41)

§. 44. Aus der Congruenz der beyden Dreyecke ACD und BCD folgt auch die Gleichheit der Winkel ADC und BDC (§. 41). Es ist daher jeder ein Rechter (§. 7). Daher der Satz:

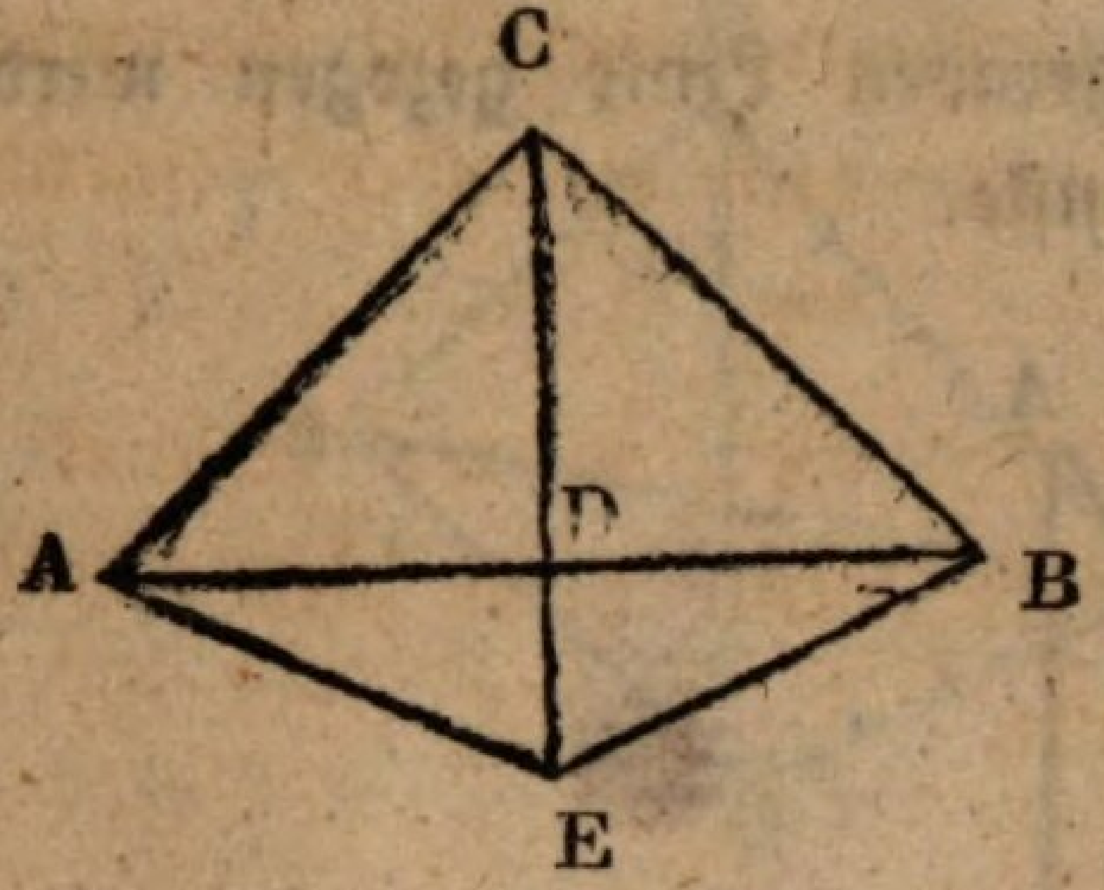
Eine Linie aus der Spitze eines gleichschenklichten Dreyecks nach der Mitte der Grundlinie gezogen, steht senkrecht auf derselben.

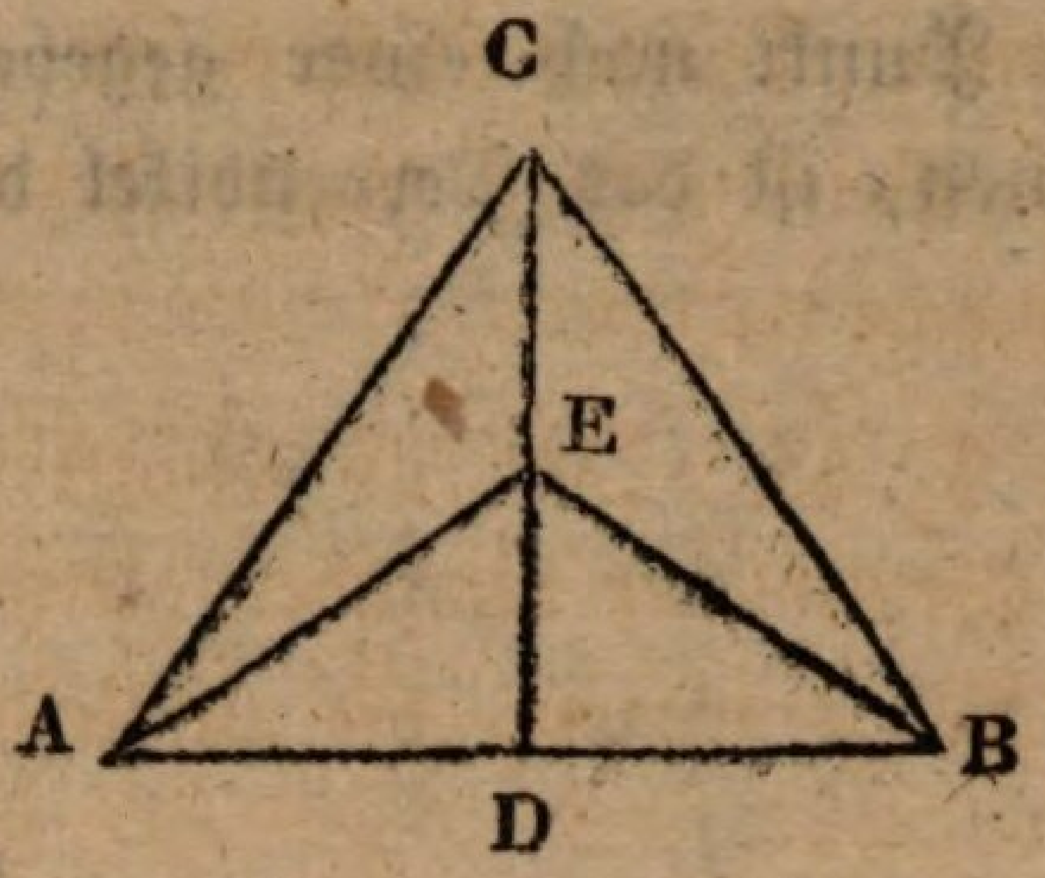
§. 45. Diese Linie halbirt auch den Winkel an der Spitze.

§. 46. Umgekehrt: Das Perpendikel aus der Spitze des gleichschenklichten Dreyecks auf die Grundlinie halbirt dieselbe, so wie auch den Winkel an der Spitze.

§. 47. Jeder Punkt auf dem Perpendikel CD ist gleichweit von A und von B entfernt.

§. 48. Wenn man durch die Spitzen zweyer gleichschenklichten Dreyecke, die auf derselben Grundlinie stehen, eine gerade Linie zieht, so geht diese senkrecht durch die Mitte der Grundlinie.





Bew. Es ist Δ AEC mit Δ BEC congruent (§. 38), also

W. ACD = BCD (41)

AC = BC (Voraussſ.)

CD = CD (Ax.)

daher

Δ ACD ≌ BCD (39)

folglich

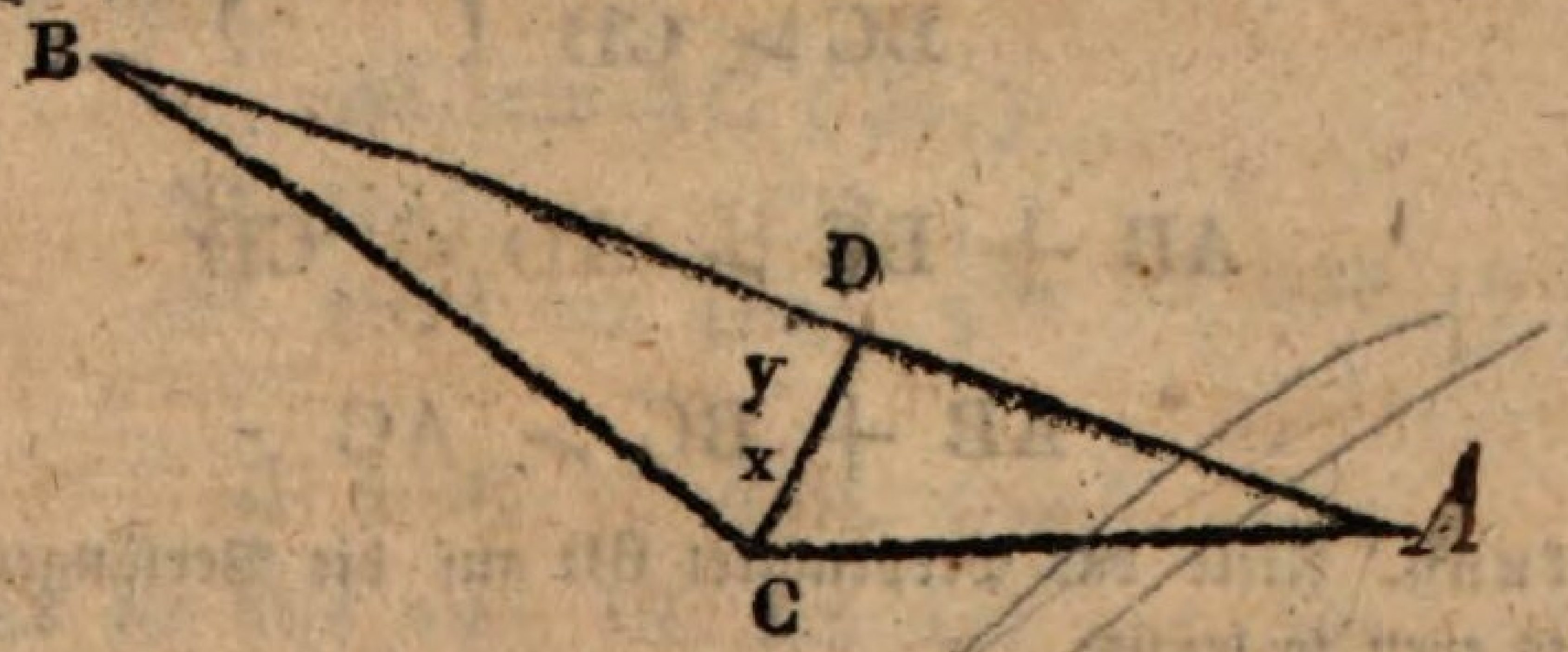
erstens AD = BD (41)

zweytens W. ADC = BDC (41), mithin jeder einem Rechten gleich (7).

§. 49. Ein Dreyeck, in welchem zwey Winkel einander gleich sind, ist gleichschenklicht. Folgt aus §. 43.

§. 50. Die Winkel des gleichseitigen Dreyecks sind alle einander gleich, und umgekehrt: ein Dreyeck, das drey gleiche Winkel hat, ist gleichseitig.

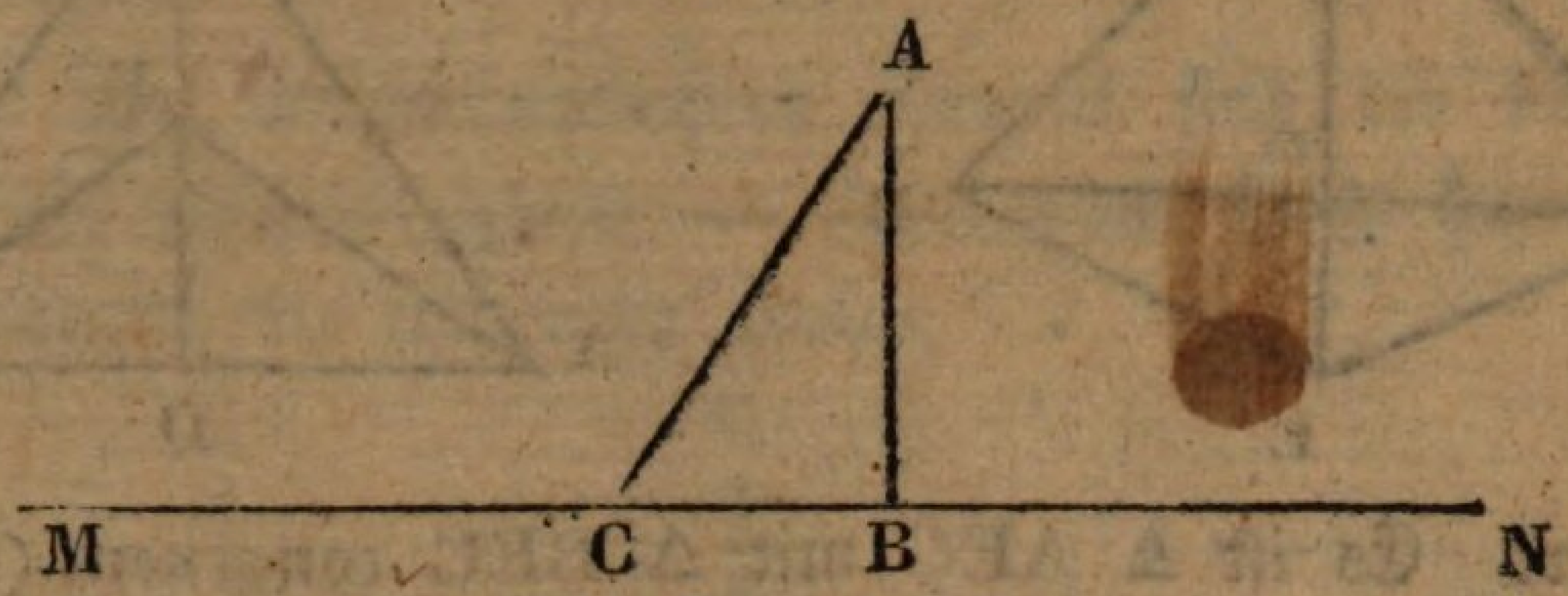
§. 51. Der größern Seite im Dreyeck steht jedesmal auch ein größerer Winkel gegen über, und umgekehrt dem größern Winkel eine größere Seite.



Bew. Es sey BA $>$ BC, so läßt sich auf BA ein Stück BD = BC abschneiden. Man ziehe CD, so ist W. x = W. y (43). Es ist aber y $>$ A (30), also auch x $>$ A, um so mehr ACB $>$ A.

§. 52. Unter allen geraden Linien, die von einem gegebe=

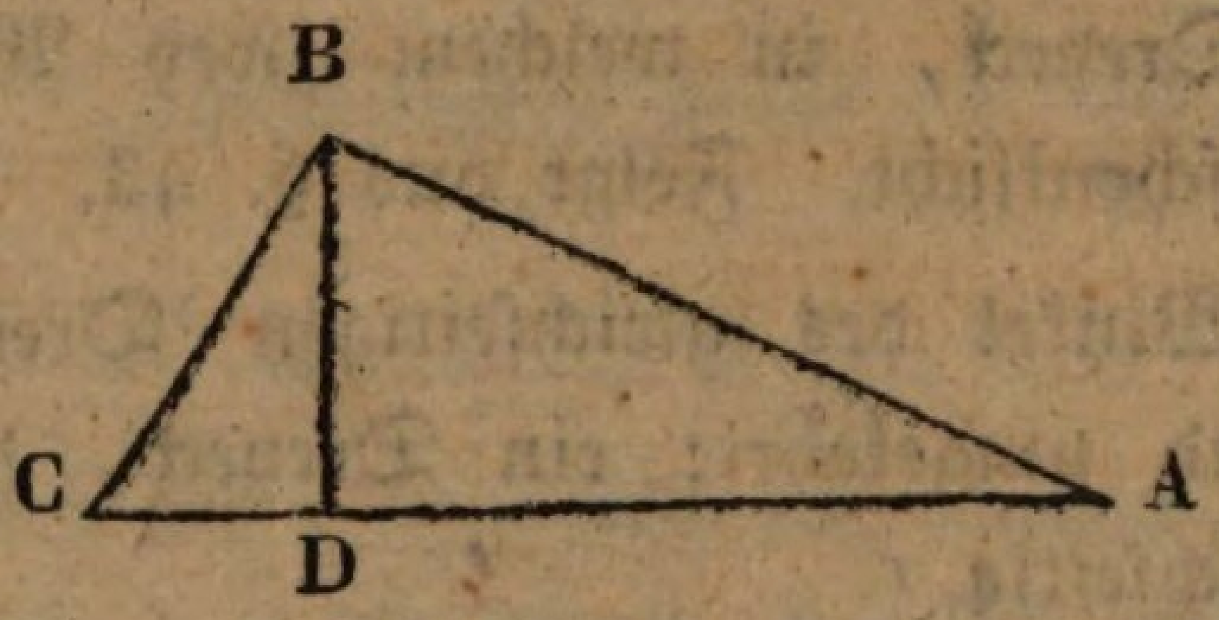
nen Punkt nach einer gegebenen geraden Linie gezogen werden können, ist das Perpendikel die kleinste.



Bew. Es sey A der Punkt, MN die gegebene Linie, AB ein Perpendikel auf dieselbe, AC irgend eine andere gerade Linie, so ist ABC ein rechtwinklichtes Dreyeck, also der Winkel bey B größer als der Winkel bey C (32), also $AC > AB$ (51).

Anmerkung. Das Perpendikel bestimmt also den Abstand oder die Entfernung eines Punktes von einer geraden Linie.

§. 53. Zwey Seiten eines Dreyecks sind zusammen immer größer als die dritte.



Bew. Man fälle das Perpendikel BD, so ist

$$\left.\begin{array}{l} AB > AD \\ BC > CD \end{array}\right\} 52$$

und

also auch

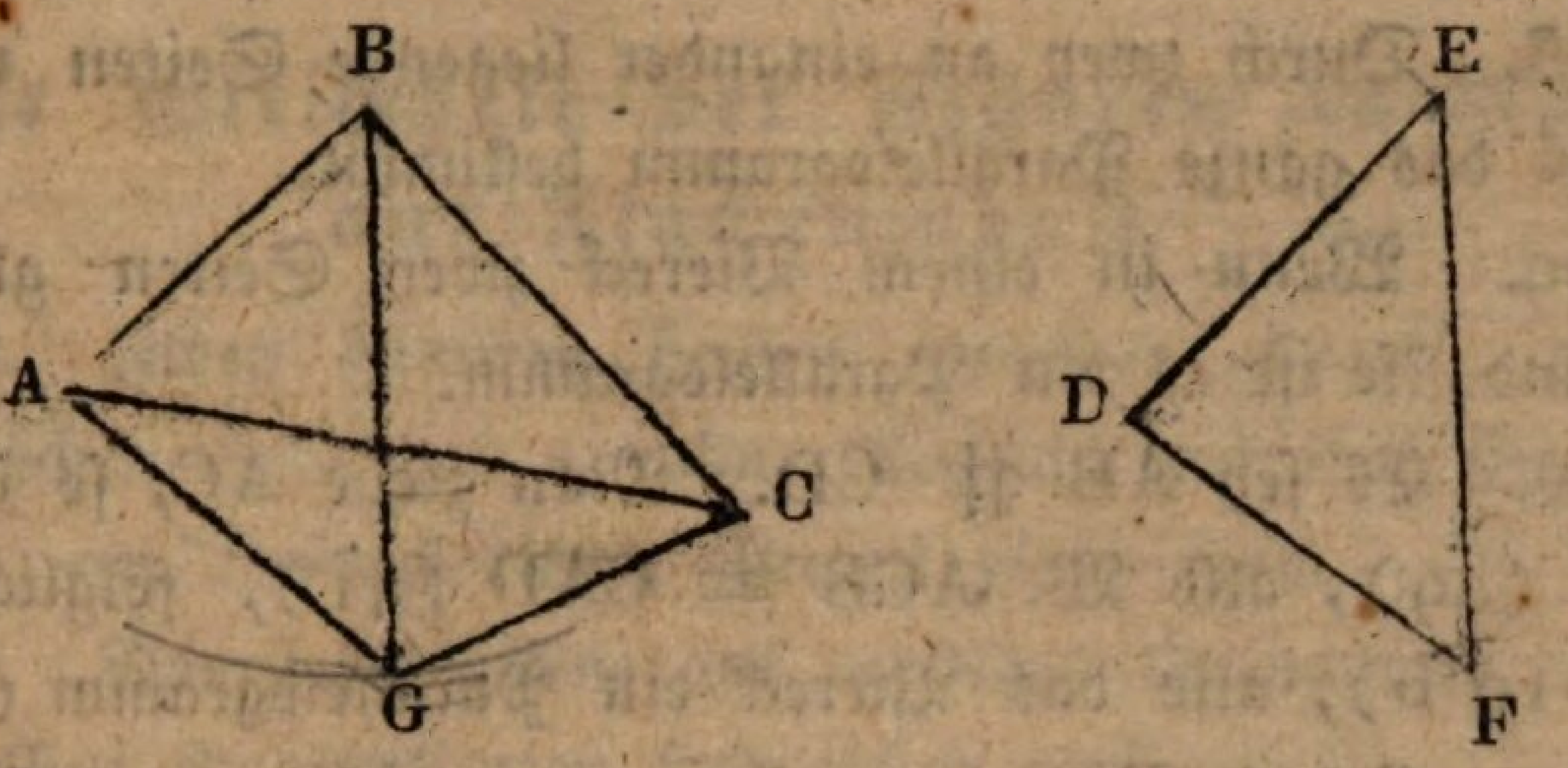
$$AB + BC > AD + CD$$

oder

$$AB + BC > AC$$

Anmerkung. Fiele das Perpendikel BD auf die Verlängerung von AC, so ist der Beweis eben so leicht.

§. 54. Wenn in zweyen Dreyecken zwey Seiten gleich, der eingeschlossene Winkel aber in dem einen Dreyeck größer als in dem andern ist, so ist auch die dritte Seite in jenem Dreyeck größer als in diesem. Und umgekehrt, wenn die dritte Seite größer ist, so ist auch jener Winkel größer.



Bew. Es seyen in den Dreyecken ABC und DEF die Seiten AB = DE und BC = EF, aber W. ABC > DEF, so ist zu beweisen, daß AC > DF sey.

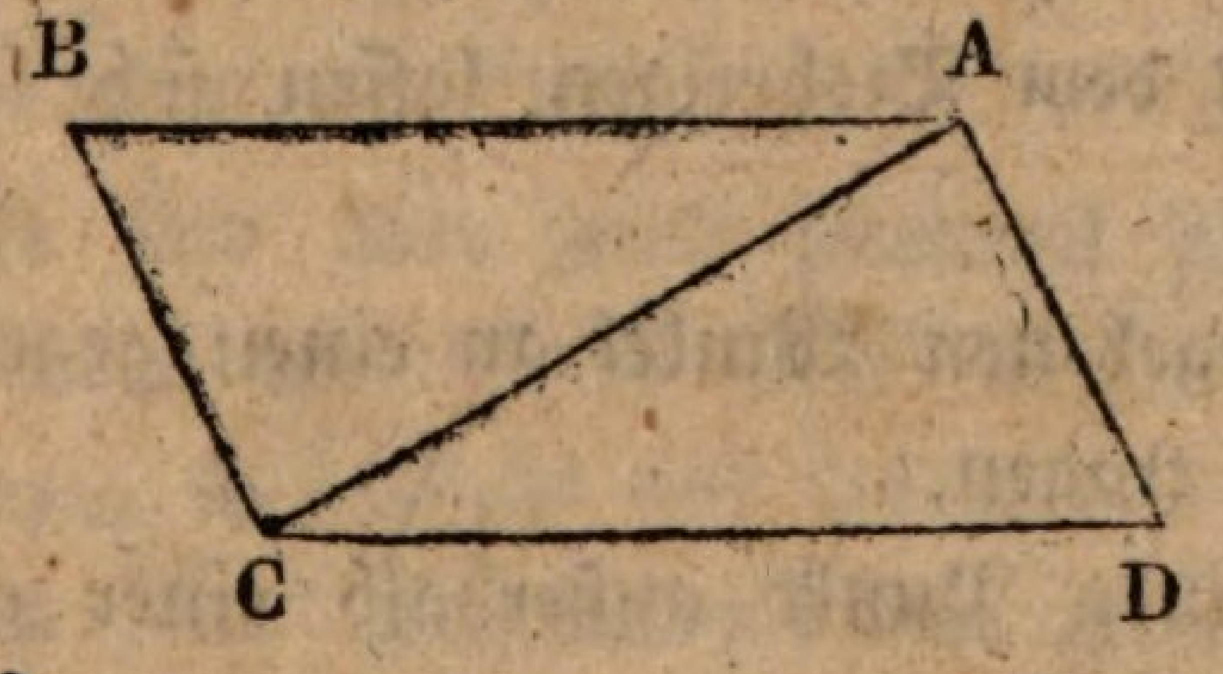
Man mache Winkel ABG = DEF, BG = EF, so ist Δ ABG ≅ DEF (39), also AG = DF.

Es ist ferner W. BGC = BCG (43), also > ACG. Um so mehr ist W. AGC > ACG; also auch im Δ AGC die Seite AC > AG (51).

Folglich ist auch, da DF = AG, AC > DF.

Anmerkung. In den Fällen, wo der Punkt G auf die Seite AC oder innerhalb des Dreyecks ABC fiele, ist der Beweis leicht.

§. 55. Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwey congruente Dreyecke getheilt.



Bew. Es ist

AC = AC (Ax.)

W. BAC = ACD }
W. BCA = DAC } §. 25 und 17

folglich

Δ ABC ≅ ADC (40)

§. 56. Es ist also auch BC = AD und AB = DC (41), d. h. die gegen über liegenden Seiten eines Parallelogramms sind gleich groß.

§. 57. Es ist ferner auch W. B = D, eben so W. BAD = BCD; d. h. im Parallelogramm sind die gegen über liegenden Winkel einander gleich.

§. 58. Durch zwey an einander liegende Seiten und einen Winkel ist das ganze Parallelogramm bestimmt.

§. 59. Wenn in einem Viereck zwey Seiten gleich und parallel sind, so ist es ein Parallelogramm.

Bew. Es sey AB ⋕ CD. Man ziehe AC, so ist Δ ABC ≅ ADC (39), also W. ACB = CAD (41), folglich CB ∥ AD (§. 19 b'), also das Viereck ein Parallelogramm (25).

§. 60. Jedes Viereck, dessen gegen über liegende Seiten gleich groß sind, ist ein Parallelogramm.

Bew. Denn es ergibt sich die Congruenz der beyden Dreyecke ABC und ADC aus §. 38; daraus die Gleichheit der Wechselswinkel, u. s. w.

§. 61. Aus §. 56 folgt, daß alle Perpendikel zwischen denselben Parallellinien gleich groß sind. — Das Perpendikel ist die kleinste Linie, die sich zwischen zweyen Parallellinien ziehen läßt (52); es mißt folglich den Abstand beyder von einander. — Es stehen also auch zwey Parallellinien überall gleich weit von einander ab, und treffen folglich, so weit man sie auch verlängern mag, nicht zusammen. Umgekehrt: wenn zwey Linien nirgends zusammen treffen, so sind sie einander parallel.

§. 62. Aus dem Bisherigen lassen sich leicht folgende Aufgaben auflösen:

a) Einen gegebenen Winkel an einen gegebenen Punkt einer geraden Linie zu tragen.

b) Durch einen Punkt außerhalb einer geraden Linie eine Parallellinie zu ziehen.

c) aus drey gegebenen Seiten ein Dreyeck zu verfertigen;

d) aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel;

e) aus einer Seite und zwey anliegenden Winkeln.

f) in einem gegebenen Punkt einer geraden Linie ein Perpendikel zu errichten.

g) Von einem gegebenen Punkt außerhalb einer geraden Linie ein Perpendikel auf dieselbe zu fällen.

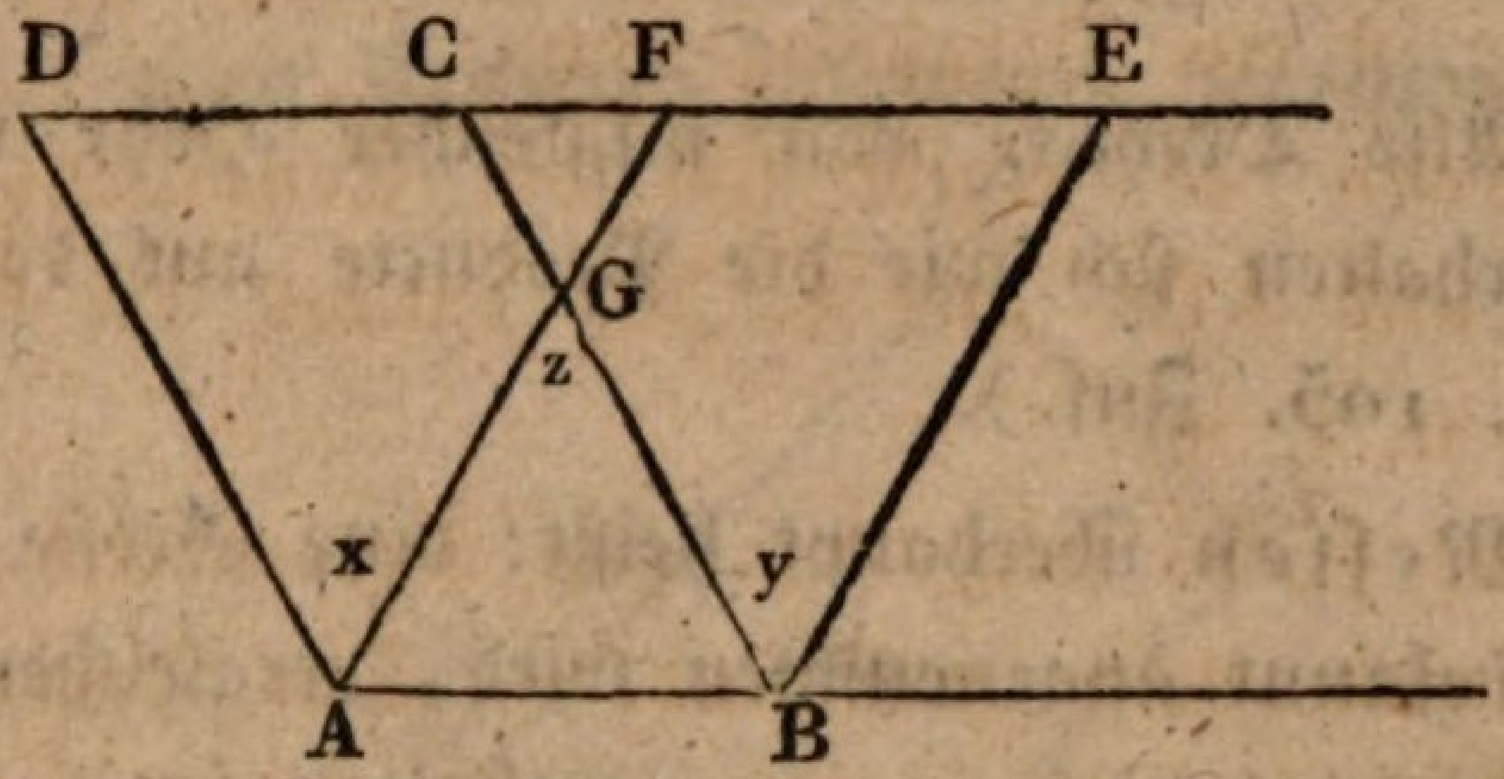
h) Eine gerade Linie in zwey gleiche Theile zu theilen.

i) Einen Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen.

Von der Gleichheit der Figuren in Rücksicht auf Flächeninhalt.

§. 63. Zwey Figuren heißen einander gleich, wenn sie gleichen Flächeninhalt haben, ohne Rücksicht auf ihre Gestalt. Es kann z. B. ein Dreyeck einem Viereck gleich seyn.

§. 64. Parallelogramme auf derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallellinien sind gleich groß.



Bew. ABCD und ABEF seyen die beyden Parallelogramme; so ist

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ AF = BE \end{array}\right\} 56$$

$$W.\ x = y \text{ (denn jeder } = z\text{, nach 17)}$$

also

$$\triangle\, DAF \cong CBE \ (38)$$

Congruente Dreyecke sind aber auch jedesmal gleich groß (36). Nimmt man von beyden das Stück CGF weg, und fügt dafür das Stück ABG hinzu, so entsteht aus jenem das Parallelogramm ABCD, aus diesem das Parallelogramm ABEF, welche also (Ax.) auch einander gleich sind.

Anmerkung. Fällt der Punkt F mit C zusammen, oder auf die Seite DC; so kann der Beweis auf ähnliche Art geführt werden.

§. 65. Es sind also auch Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe (26 und 61) einander gleich.

§. 66. Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

§. 67. Parallelogramme von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.

§. 68. Also Parallelogramme von ungleicher Höhe und ungleicher Grundlinie verhalten sich wie die Producte aus der Höhe in die Grundlinie (I. 105. Zus.)

§. 69. Da jedes Dreyeck halb so groß ist, als ein Parallelogramm, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat, wie sich leicht aus §. 55 ergibt; so sind auch alle Dreyecke von einerley Höhe und einerley Grundlinie gleich groß.

§. 70. Dreyecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

§. 71. Dreyecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.

§. 72. Also Dreyecke von ungleicher Höhe und ungleicher Grundlinie verhalten sich wie die Producte aus der Höhe in die Grundlinie (I. 105. Zus.).

§. 73. Messen überhaupt heißt: eine Größe mit einer andern, die als bekannt angenommen wird, vergleichen, indem man bestimmt, wie vielmal diese in jener enthalten sey. Die gemessene Größe und ihr Maßstab müssen also gleichartige Dinge seyn. Flächen werden wieder nur durch Flächen gemessen. Als Maßstab der Flächen bedient man sich gewöhnlich des Quadrats.

§. 74. Die Seite eines Quadrats (d. h. eines Parallelogramms, das vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel hat) sey $= 1$, so ist das Product aus der Höhe in die Grundlinie $= 1 . 1 = 1$. Die Grundlinie eines andern Parallelogramms enthalte die Seite des Quadrats g mal, und die Höhe dieses Parallelogramms enthalte die Seite des Quadrats h mal; so ist das Product aus der Höhe in die Grundlinie $= h . g$. Folglich verhält sich das Parallelogramm zu dem Quadrat $= h . g : 1$, d. h. das Parallelogramm enthält $h . g$ solcher Quadrate.

§. 75. Ein Parallelogramm auszumessen, messe man also Grundlinie und Höhe mit der Seite desjenigen Quadrats, das man als Maß-Einheit annimmt, und multiplicire die erhaltenen Zahlen mit einander. Das Product gibt das Verhältniß des Parallelogramms zu dem Quadrate.

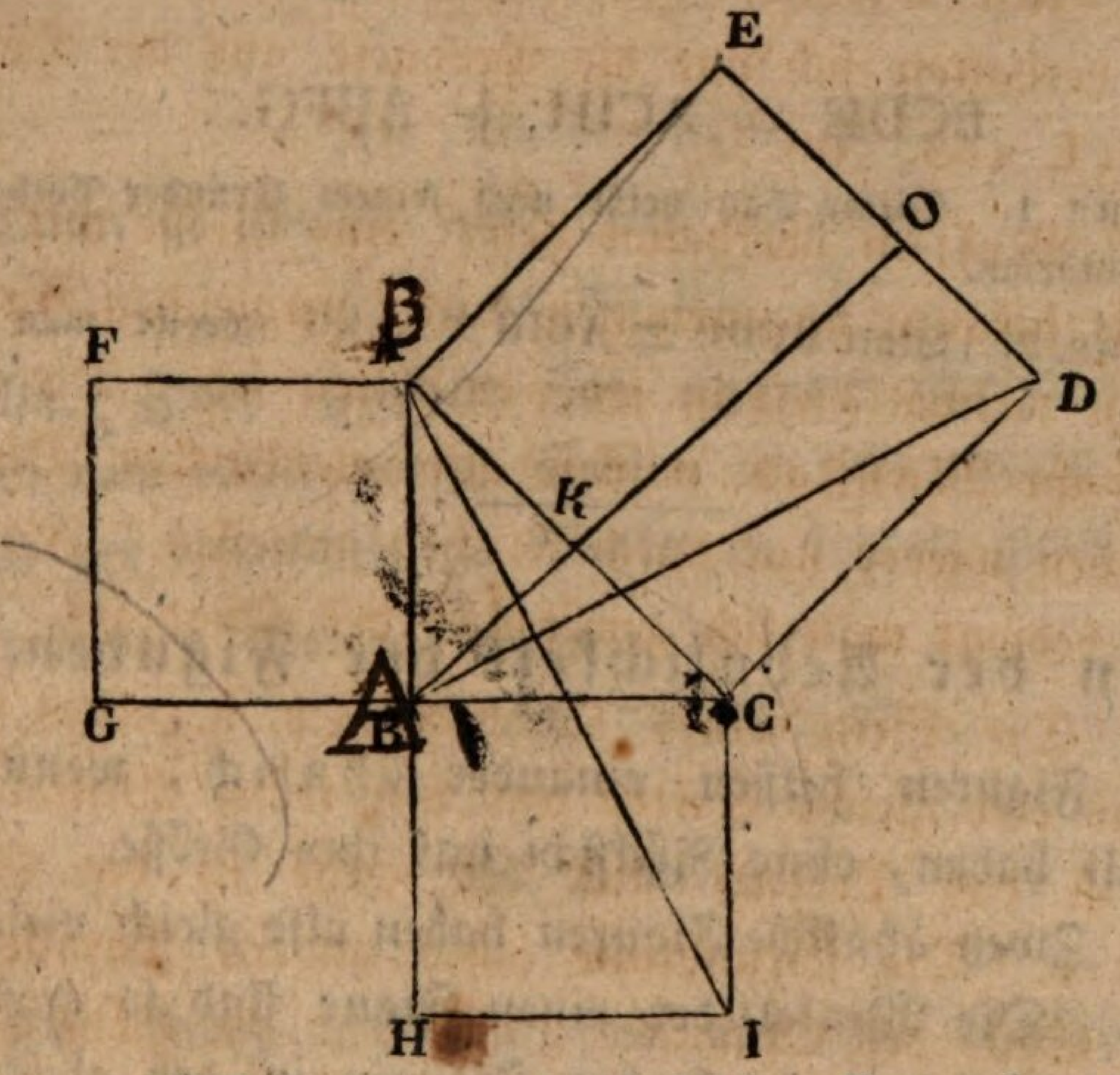
Kürzer ausgedrückt: man multiplicire die Grundlinie mit der Höhe.

§. 76. Quadrate verhalten sich wie die Quadratzahlen ihrer Seiten.

§. 77. Ein Dreyeck auszumessen, multiplicire man Grundlinie und Höhe, und dividire das Product durch 2 (vgl. §. 69).

§. 78. Eine jede andere geradlinichte Figur auszumessen, zerlege man die Figur in Dreyecke, bestimme den Inhalt eines jeden nach §. 77, und addire den Inhalt aller Dreyecke zusammen.

§. 79. Das Quadrat der Hypotenuse ist so groß als die Quadrate der beyden Katheten zusammen genommen.



Bew. ABC sey das rechtwinklichte Dreyeck, BC die Hypotenuse, AB und AC die beyden Katheten (vgl. §. 23), und über den drey Seiten seyen Quadrate beschrieben. Man ziehe durch A eine Linie AO || BE, so sind BEOK und KODC zwey Parallelogramme. Man ziehe ferner AD und BI, so ist

AC = CI } als Seiten derselben Quadrate, vgl. §. 74
CD = CB }

und

W. ACD = BCI (denn jeder besteht aus einem R. und dem Winkel ACB)

also

Δ DCA = CIB (39)

Nun hat aber das Dreyeck DCA mit dem Parallelogramm KODC die gleiche Grundlinie DC, und, da es mit demselben zwischen

denselben Parallellinien CD und AO liegt, auch einerley Höhe; es ist folglich halb so groß als das Parallelogramm KODC. Eben so ist das Dreyeck CIB halb so groß als das Quadrat ACIH. Es ist mithin

$$KODC = ACIH$$

Auf die gleiche Art läßt sich beweisen, daß

$$BEOK = ABFG$$

ist. Folglich ist (Ax.)

$$KODC + BEOK = ACIH + ABFG$$

oder

$$BCDE = ACIH + ABFG.$$

Anmerkung 1. Dieser Satz heißt nach seinem Erfinder Pythagoras der Pythagoräische Lehrsatz.

Anmerkung 2. Statt $BCDE = ACIH + ABFG$ schreibt man auch $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 80. Figuren heißen einander **ähnlich**, wenn sie die gleiche Gestalt haben, ohne Rücksicht auf ihre Größe.

§. 81. Zwey ähnliche Figuren haben also gleich viele Seiten und Winkel. Die Winkel der einen Figur sind so groß als die der andern, und folgen in beyden Figuren in der gleichen Ordnung auf einander. Die gleich liegenden Seiten haben unter einander das gleiche Verhältniß in der einen Figur, wie in der andern; oder sind **proportionirt**.

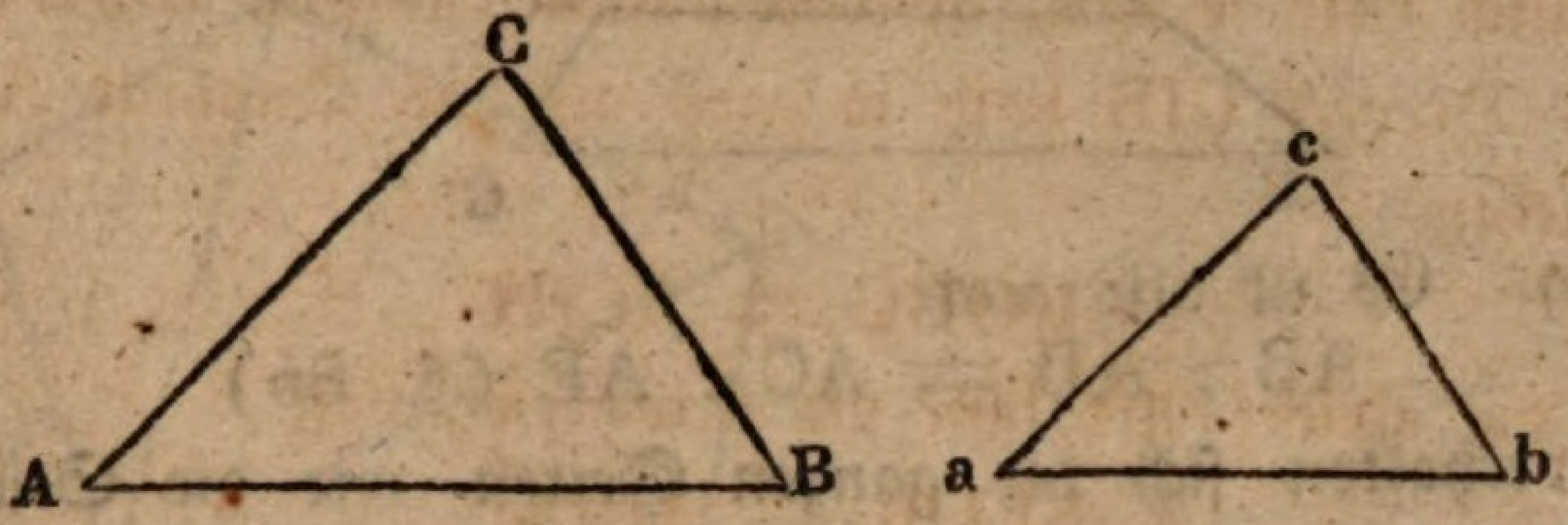
Anmerkung 1. Zwey ähnliche Figuren von verschiedener Größe lassen sich so ansehen, als wenn sie auf die gleiche Art, nur nach zwey verschiedenen Maßstäben, gezeichnet wären.

Anmerkung 2. Die Linien, welche in der einen Figur gerade so liegen, wie in der andern, nennt man auch **gleichnamige Linien**.

§. 82. Die Gestalt eines Dreyecks wird schon durch einige Stücke bestimmt, so daß, wenn diese gegeben sind, die übrigen nicht mehr nach Willkühr angenommen werden können.

Anmerkung. Auch hier gibt es wieder sehr viele Fälle, in welchen die Gestalt eines Dreyecks durch einige Stücke bestimmt wird. Im Allgemeinen kann man annehmen, daß **zwey Data** jedesmal hinreichen.

§. 83. Zwey Dreyecke sind einander ähnlich, wenn in beyden die Seiten proportionirt sind.



Mit andern Worten: wenn

$$AB : ab = AC : ac$$

und

$$AB : ab = BC : bc$$

ist. — Dann ist nämlich auch (nach I. 104)

$$AC : ac = BC : bc$$

§. 84. Zwey Dreyecke sind einander ähnlich, wenn zwey Seiten in dem einen zweyen Seiten in dem andern proportionirt sind, und der eingeschlossene Winkel in beyden gleich ist.

Mit andern Worten: wenn

$$AB : AC = ab : ac$$

und

$$W.\ A = a$$

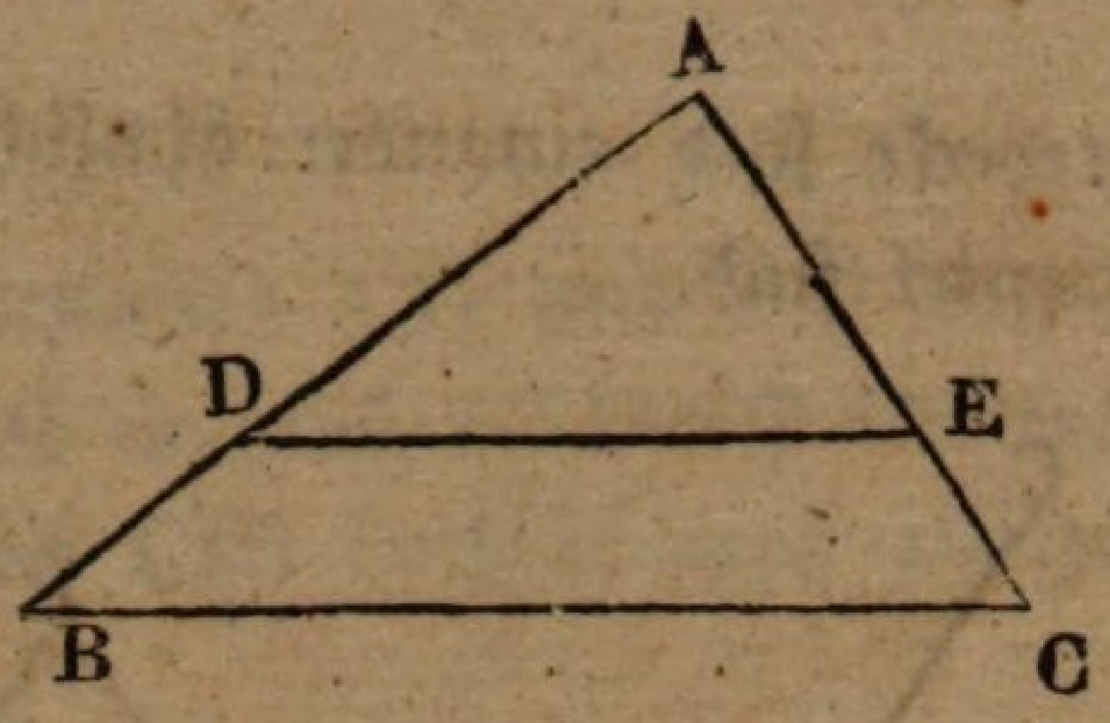
ist.

§. 85. Zwey Dreyecke sind einander ähnlich, wenn die Winkel in beyden gleich sind.

§. 86. In ähnlichen Dreyecken stehen den gleichnamigen Seiten gleiche Winkel, und den gleichen Winkeln gleichnamige Seiten gegen über.

§. 87. Die Aehnlichkeit zweyer mehrseitigen Figuren läßt sich im Allgemeinen dadurch beweisen, daß man beyde durch gleichnamige Diagonalen in Dreyecke theilt, und die Aehnlichkeit und gleichmäßige Lage der einzelnen auf einander folgenden Dreyecke darthut.

§. 88. Wenn man in einem Δ ABC eine Linie DE || BC zieht, so ist das abgeschnittene Δ ADE dem ganzen ABC ähnlich. Folgt aus §. 85.



§. 89. Es ist also auch

$$AB : AD = AC : AE \quad (§.\ 86)$$

d. h. es verhalten sich die ganzen Seiten wie die Stücke oberhalb DE.

§. 90. Also auch

$$AB - AD : AD = AC - AE : AE \quad (I.\ §.\ 100)$$

oder

$$BD : AD = CE : AE$$

d. h. es verhalten sich die Stücke oberhalb wie die Stücke unterhalb.

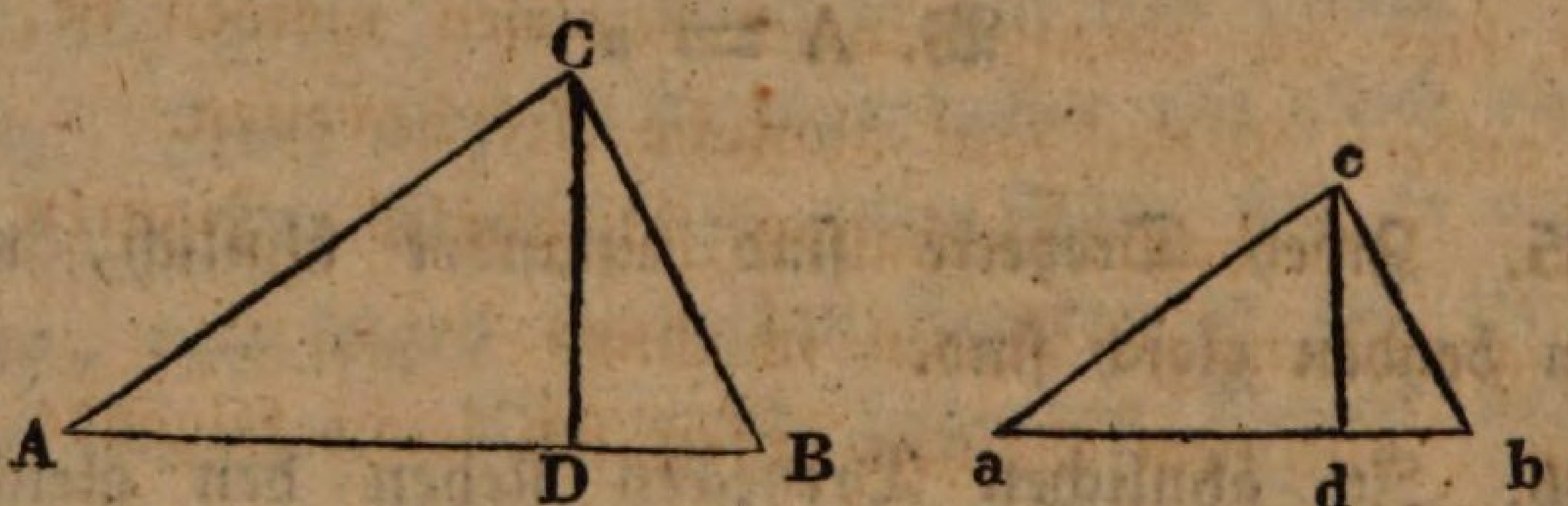
§. 91. Auch verhält sich

$$AD : DE = AB : BC$$

Anmerkung. Hierauf beruht die gewöhnliche Construction des sogenannten verjüngten Maßstabes.

§. 92. Umgekehrt: wenn eine von den Proportionen (§. 89 — 91) Statt findet, so ist DE || BC.

§. 93. Aehnliche Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.



Bew. Es sey △ ABC ∽ abc; man fälle die Perpendikel CD und cd, so ist auch △ ACD ∾ acd (85),

also

$$AC : ac = CD : cd \quad (86)$$

und

$$AC : ac = AB : ab \quad (\text{Voraus}.)$$

daher

$$AC^2 : ac^2 = AB \cdot CD : ab \cdot cd \quad (I.\ §.\ 96)$$

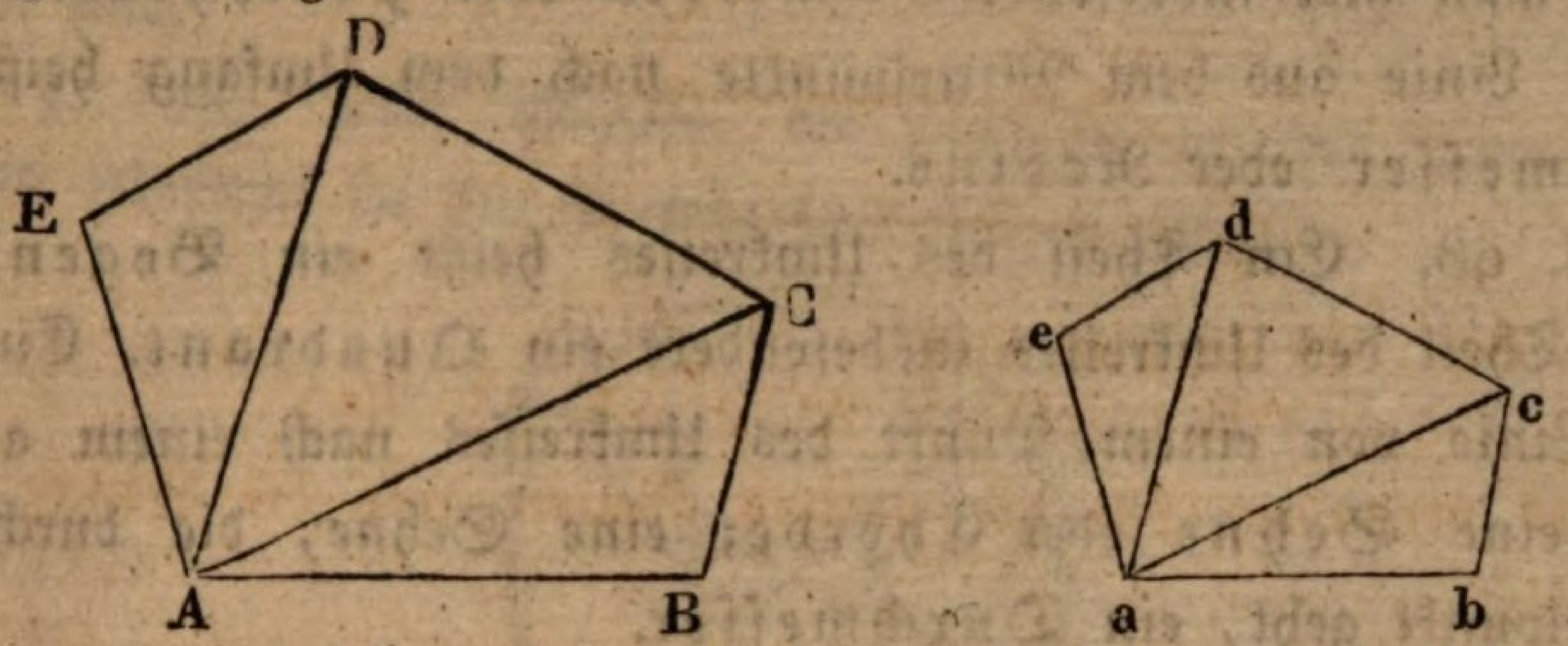
Es ist aber auch

$$\triangle ABC : abc = AB \cdot CD : ab \cdot cd \quad (72)$$

folglich

$$\triangle ABC : abc = AC^2 : ac^2 \quad (I\ §.\ 104)$$

§. 94. Aehnliche Vielecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.



Bew. Es sey ABCDE ∽ abcde. Man theile beyde durch die gleichnamigen Diagonalen in Dreyecke, so werden die einzelnen Dreyecke einander ähnlich seyn (vgl. §. 87). Alle gleichnamigen Seiten beyder Vielecke stehen mit einander in Proportion (§. 81), also sind auch die Quadrate derselben proportionirt (I §. 98). Man hat also (§. 93)

$$\triangle\ ABC : abc = AB^2 : ab^2 = AB^2 : ab^2$$
$$\triangle\ ACD : acd = CD^2 : cd^2 = AB^2 : ab^2$$
$$\triangle\ ADE : ade = AE^2 : ae^2 = AB^2 : ab^2$$

folglich $\overline{ABC + ACD + ADE : abc + acd + ade = 3\,AB^2 : 3\,ab^2}$
(I §. 101)

mithin auch

$$ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2 \text{ (I §. 92).}$$

Was hier an einem Fünfeck bewiesen worden ist, läßt sich an jedem andern Vieleck auf ähnliche Art beweisen.

§. 95. Ueberhaupt verhalten sich ähnliche Figuren wie die Quadrate gleichnamiger Linien in ihnen.

§. 96. Aus dem Obigen lassen sich leicht folgende Aufgaben auflösen:

a) Zu drey gegebenen Linien die vierte geometrische Proportionallinie zu finden.

b) Eine gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

c) Eine gerade Linie so zu theilen, daß sich die Theile wie gegebene Zahlen verhalten.

Vom Kreise.

§. 97. Eine Figur, in der jeder Punkt des Umfangs von einem gewissen innern Punkte gleich weit absteht, heißt ein

Kreis. Jener Punkt heißt der Mittelpunkt. Den Umfang nennt man hier insbesondere Umkreis oder Peripherie. Eine gerade Linie aus dem Mittelpunkte nach dem Umfang heißt ein Halbmesser oder Radius.

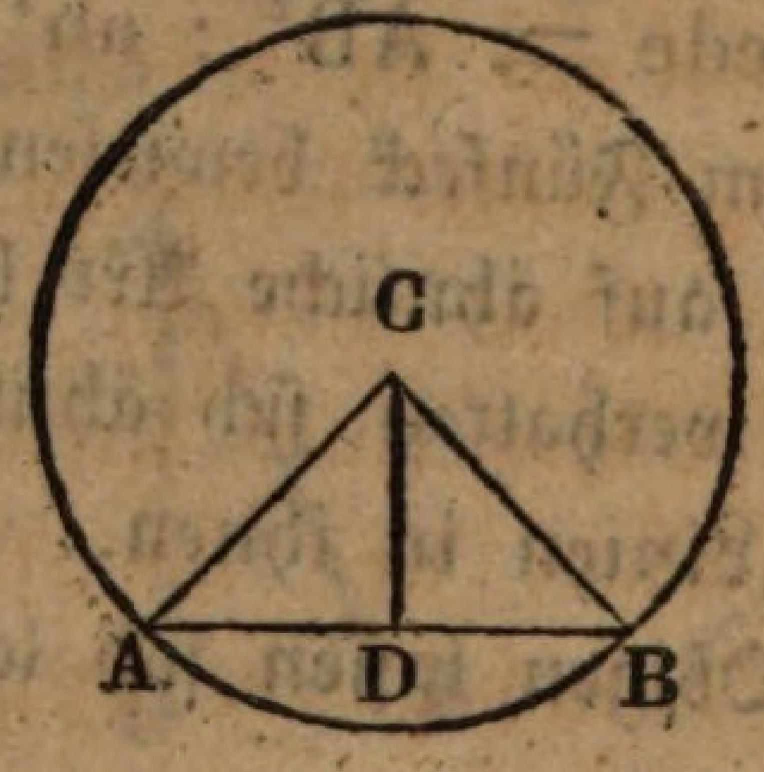
§. 98. Ein Theil des Umkreises heißt ein Bogen, der vierte Theil des Umkreises insbesondere ein Quadrant. Eine gerade Linie von einem Punkt des Umkreises nach einem andern heißt eine Sehne oder Chorde; eine Sehne, die durch den Mittelpunkt geht, ein Durchmesser.

§. 99. Ein Stück des Kreises, das von zweyen Halbmessern und einem Bogen begränzt wird, heißt ein Kreisausschnitt oder Sector; ein Stück, das von einer Sehne und einem Bogen begränzt wird, ein Kreisabschnitt oder Segment.

§. 100. Zwey oder mehrere Kreise, welche denselben Mittelpunkt haben, heißen concentrische Kreise.

§. 101. Aus 97 folgt: Alle Halbmesser desselben Kreises sind einander gleich. Eben so auch alle Durchmesser.

§. 102. Ein Perpendikel aus eines Kreises Mittelpunkt auf eine Sehne halbirt dieselbe.



Bew. Das Δ ACB ist gleichschenklicht. (§. 101). Es gilt hier also der Satz §. 46.

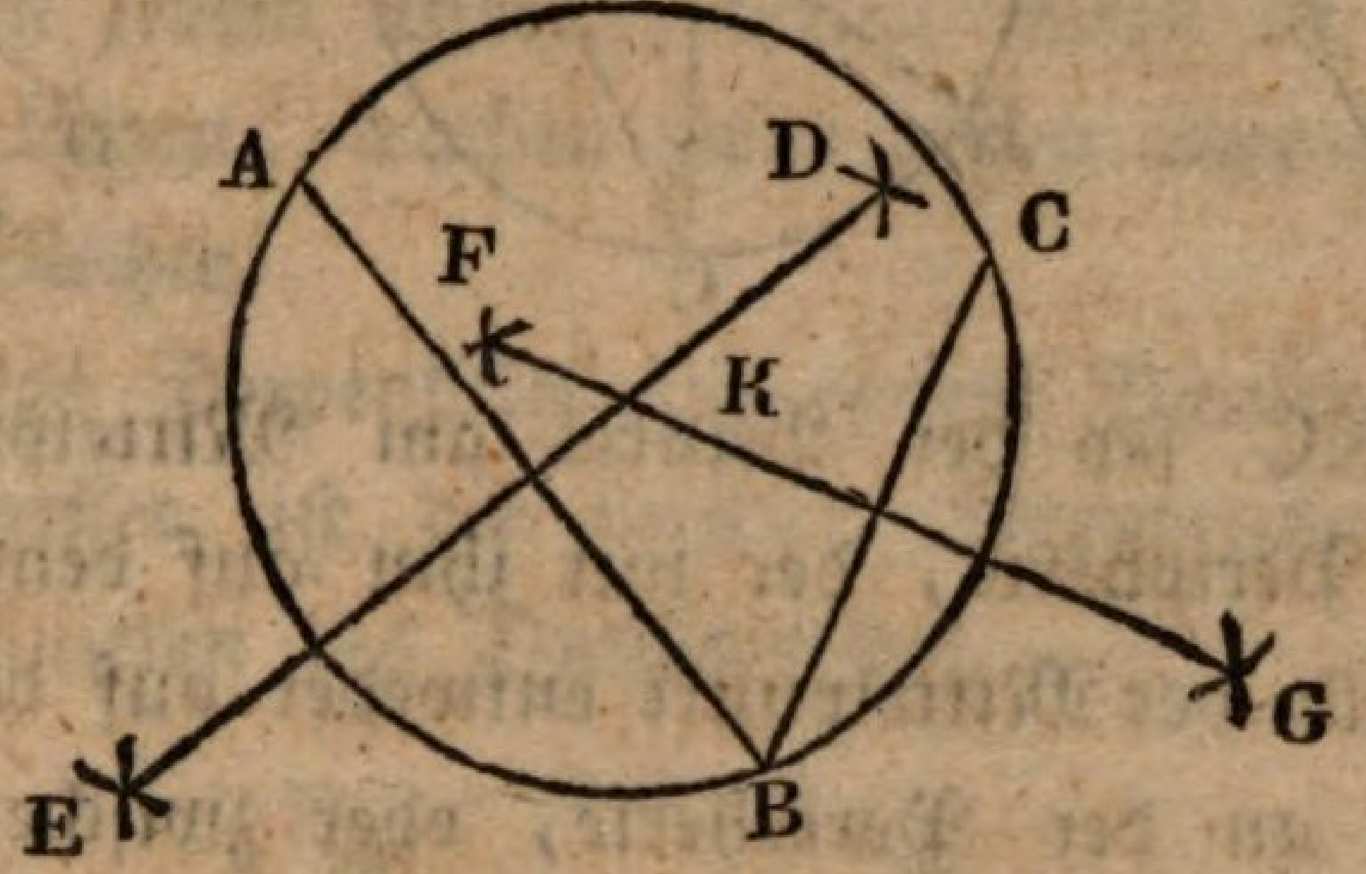
§. 103. Umgekehrt: eine gerade Linie aus dem Mittelpunkt eines Kreises auf die Mitte der Sehne gezogen, steht senkrecht auf ihr; und

§. 104. Ein Perpendikel, durch die Mitte einer Sehne gezogen, geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

§. 105. Also: Zwey Perpendikel, durch die Mitte zweyer Sehnen gezogen, treffen im Mittelpunkt des Kreises zusammen. Der Mittelpunkt eines Kreises kann daher durch zwey solche

Perpendikel gefunden werden, wenn die Sehnen selbst nicht parallel sind.

§. 106. Drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, liegen jedesmal in der Peripherie desselben Kreises.



Bew. A, B und C seyen die drey Punkte. Man halbire die Linien AB und BC durch die Perpendikel DE und FG, so ist jeder Punkt auf DE eben so weit von A als von B (§. 47) und jeder Punkt auf FG eben so weit von B als von C entfernt, also AK = BK = CK, und K oder der Punkt, wo sich beyde Perpendikel durchschneiden, der Mittelpunkt des Kreises, in dessen Peripherie die drey Punkte, A, B und C liegen.

§. 107. Durch drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, läßt sich also jedesmal ein Kreis beschreiben; und da sich DE und FG nur in einem Punkte schneiden, so ist durch die Lage dreyer Punkte der ganze Kreis bestimmt.

§. 108. Gleichen Bögen eines Kreises liegen gleiche Winkel am Mittelpunkte gegen über; und umgekehrt gehören zu gleichen Winkeln am Mittelpunkt auch gleiche Bögen.

§. 109. Im Kreise verhalten sich die Winkel am Mittelpunkte wie die ihnen gegen über stehenden Bögen.

§. 110. Zu gleichen Winkeln am Mittelpunkt verschiedener Kreise gehören ähnliche Bögen, d. h. solche, die zu der Peripherie ihres Kreises einerley Verhältniß haben.

Anmerkung. Hierauf beruht die Eintheilung der Peripherie in Grade, um damit Winkel zu messen. Man theilt nähmlich die ganze Peripherie gewöhnlich in 360 gleiche Theile oder Grade, den Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden. — Transporteur.

§. 111. Der Winkel am Mittelpunkt ist noch einmal so groß als der Winkel an der Peripherie, der mit ihm auf demselben Bogen steht.

Fig. 1.

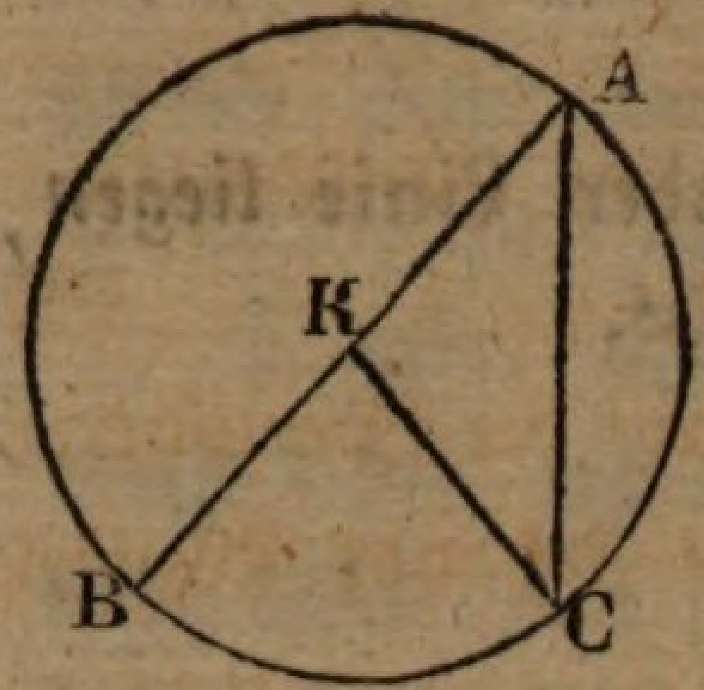


Fig. 2.

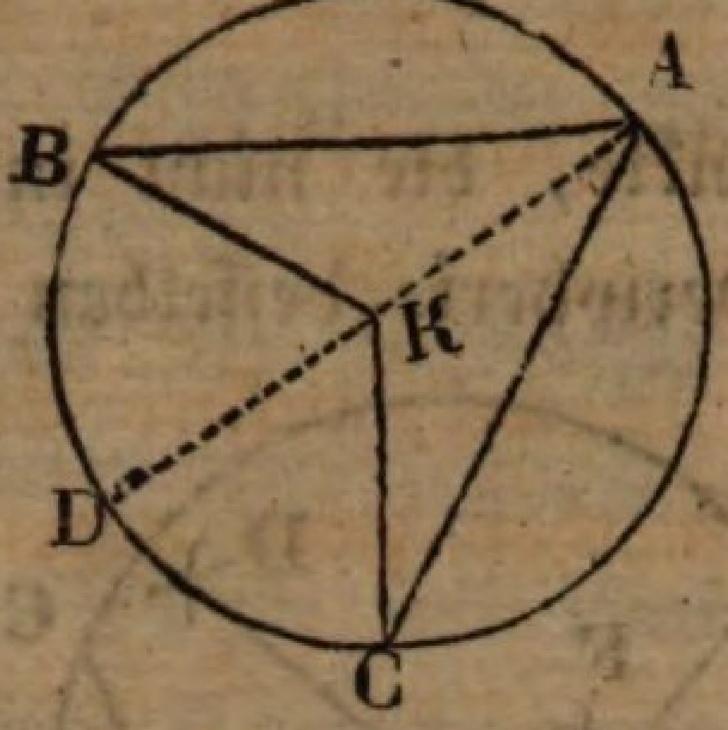
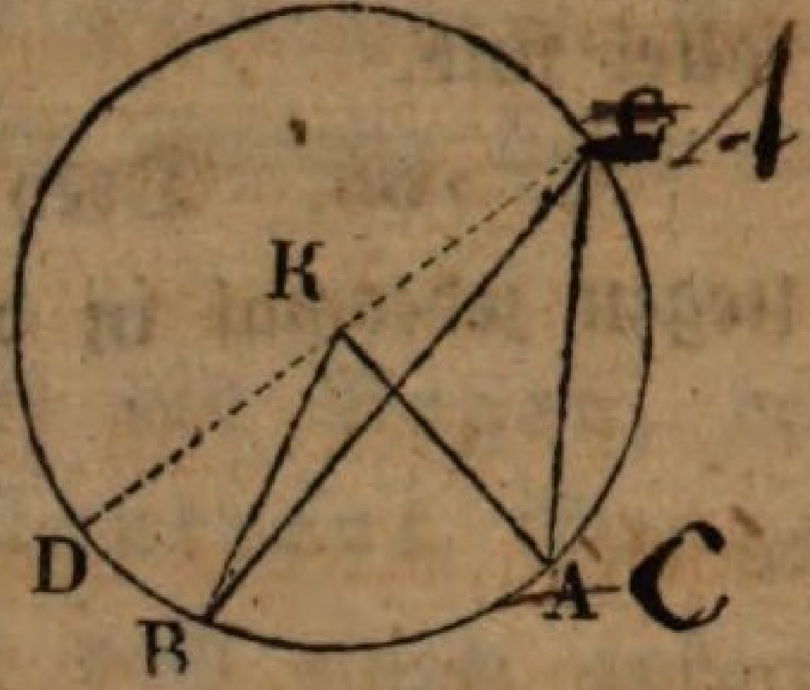


Fig. 3.



Bew. BKC sey der Winkel am Mittelpunkt, BAC der Winkel an der Peripherie, der mit ihm auf dem gleichen Bogen BC steht; so fällt der Mittelpunkt entweder auf den einen Schenkel des Winkels an der Peripherie, oder zwischen dieselben oder außerhalb derselben.

I. wenn der Mittelpunkt K auf den einen Schenkel des Peripheriewinkels fällt (Fig. 1), so ist

W. BKC = BAC + ACK (§. 29)

aber

W. ACK = BAC (§. 43)

also (Ax.)

W. BKC = BAC + BAC = 2 . BAC.

II. wenn der Mittelpunkt K zwischen die beyden Schenkel des Peripheriewinkels fällt (Fig. 2). Man ziehe die gerade AKD, so ist nach No. I

W. BKD = 2 . BAD
W. CKD = 2 . CAD

also

W. CKD + BKD = 2 . CAD + 2 . BAD

oder

W. BKC = 2 . BAC.

III. wenn der Mittelpunkt K außerhalb der beyden Schenkel des Peripheriewinkels fällt (Fig. 3). Man ziehe wieder die gerade AKD, so ist nach No. I.

W. CKD — BKD = 2 . CAD — 2 . BAD

oder

W. BKC = 2 . BAC.

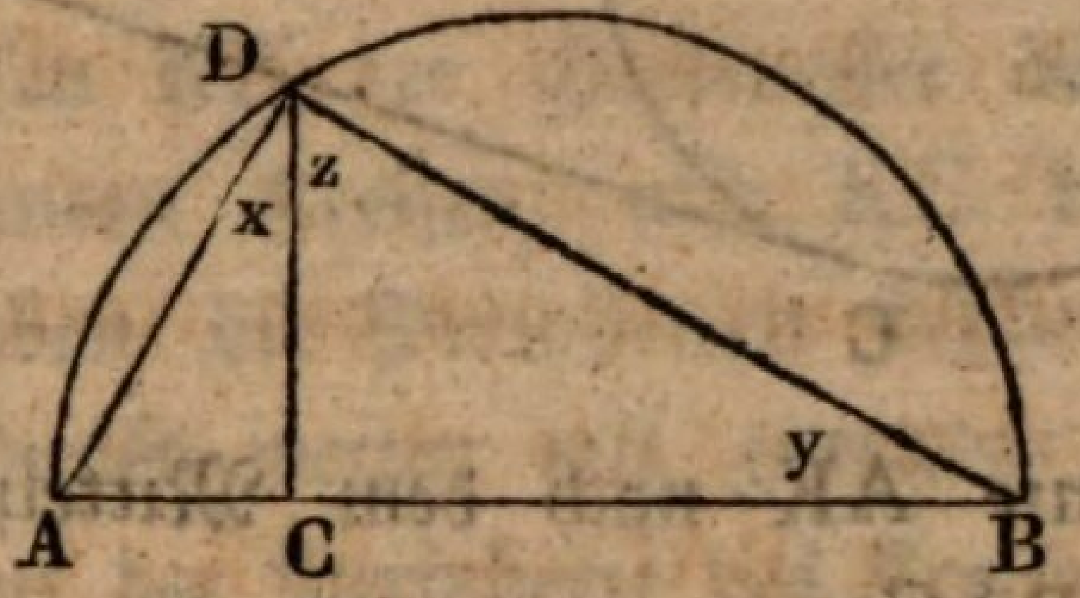
§. 112. Peripheriewinkel, die auf gleichen Bögen stehen, sind einander gleich, und umgekehrt: gleiche Peripheriewinkel fassen gleiche Bögen zwischen ihre Schenkel.

§. 113. Ein Winkel an der Peripherie hat die Hälfte des Bogens, auf welchem er steht, zu seinem Maße.

§. 114. Ein Peripheriewinkel, der auf den Endpunkten des Durchmessers steht, ist = 1 R.

§. 115. In jedem Viereck, dessen Ecken in der Peripherie desselben Kreises liegen, machen zwey gegen über stehende Winkel zusammen zwey Rechte.

§. 116. Das Perpendikel aus einem Punkte der Peripherie auf den Durchmesser ist die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Abschnitten des Durchmessers.



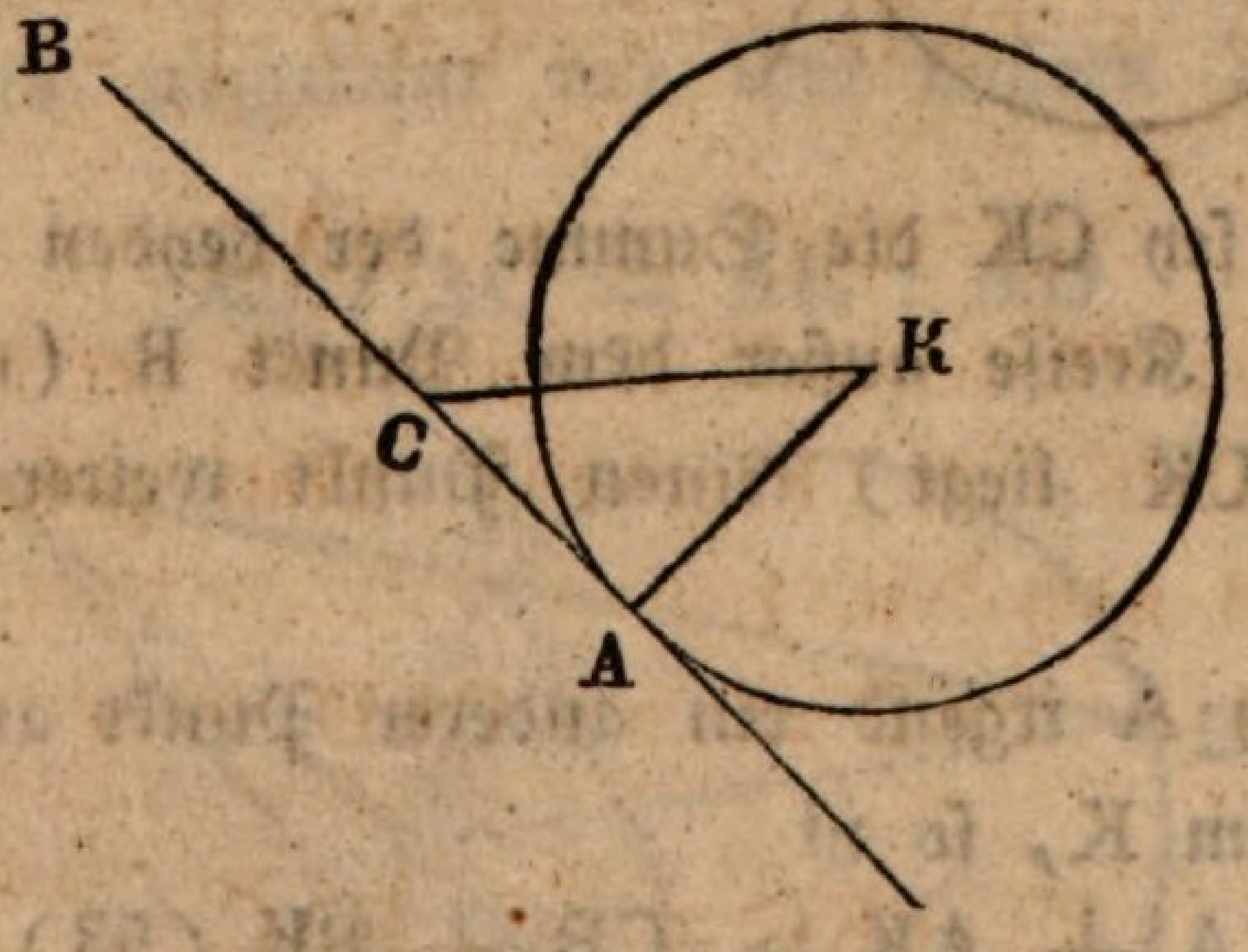
Bew. Es macht x mit z einen Rechten (114) und y mit z einen Rechten (28) also ist x = y; also ist das rechtwinklichte Dreyeck ACD dem rechtwinklichten Dreyeck DCB ähnlich (§. 85), folglich (§. 86)

$$AC : DC = DC : CB$$

§. 117. Da auch Δ ADC ∽ ADB ist, so hat man auch

$$AC : AD = AD : AB$$

§. 118. Ein Perpendikel, auf das Ende eines Halbmessers errichtet, hat mit dem Kreise keinen Punkt weiter gemein.

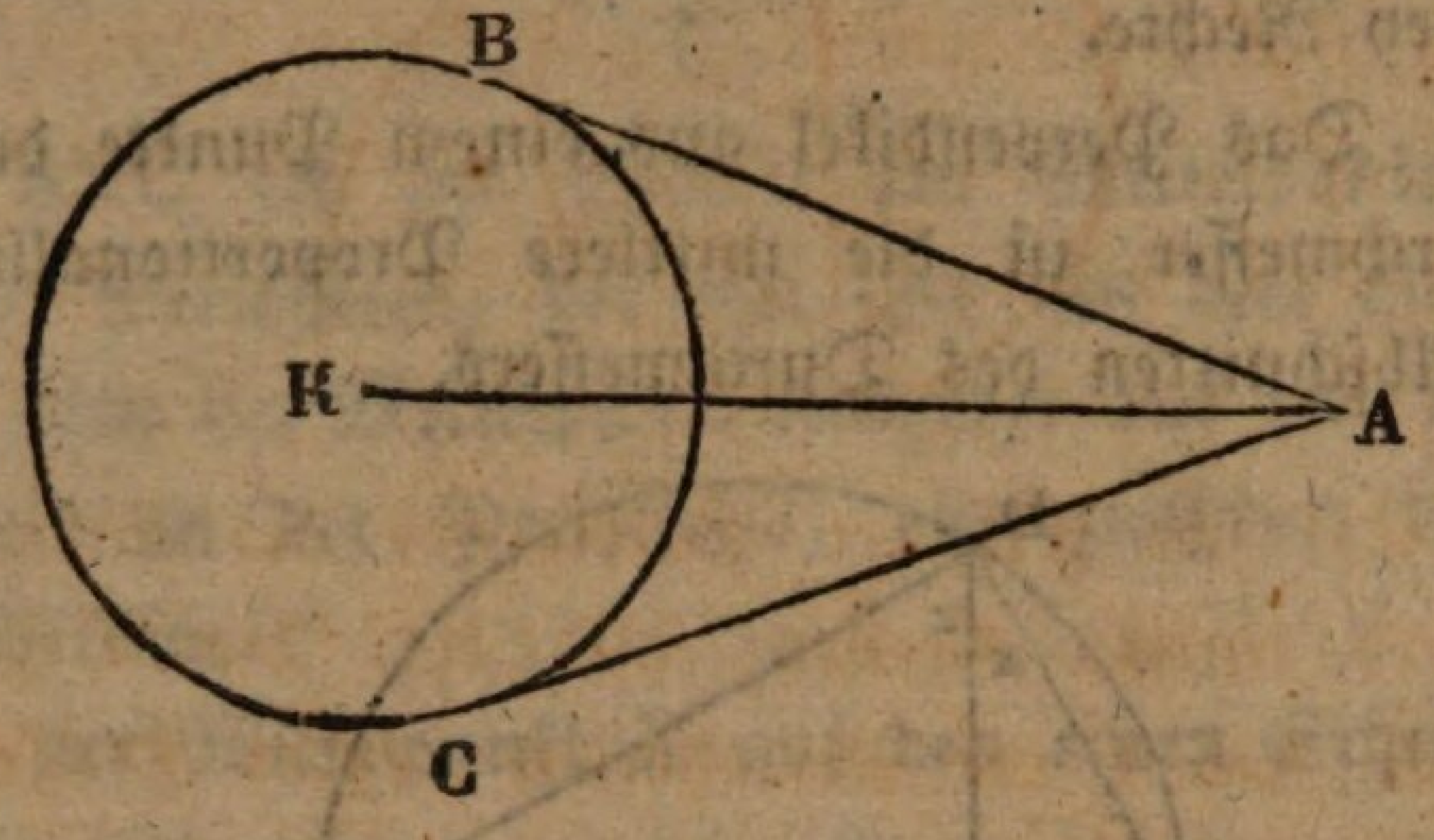


Bew. Wenn BA senkrecht auf KA, so ist jede andere Linie, wie KC, > KA (§. 52), also größer als der Halbmesser. Folglich liegt jeder andere Punkt auf AB außerhalb des Kreises.

§. 119. Eine solche Linie, welche mit dem Kreise nur einen einzigen Punkt gemein hat, heißt eine **Tangente** des Kreises.

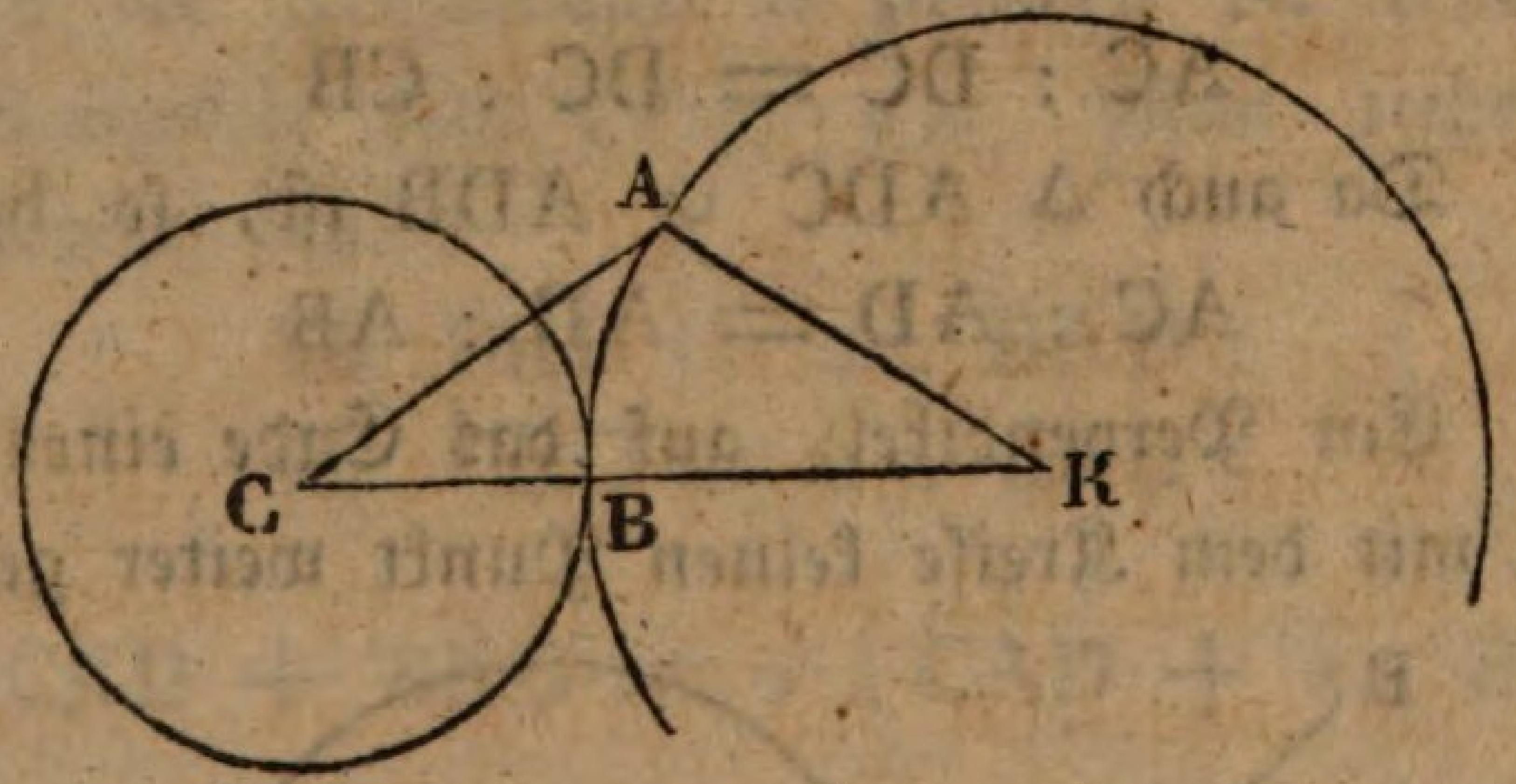
§. 120. Ein Halbmesser, an den Berührungspunkt einer Tangente gezogen, macht mit ihr einen rechten Winkel.

§. 121. Von jedem Punkt A außerhalb des Kreises lassen sich jedesmal zwey Tangenten AB und AC an den Kreis ziehen.



Die gerade Linie AK nach dem Mittelpunkte des Kreises halbirt den Winkel BAC.

§. 122. Wenn die Mittelpunkte zweyer Kreise um die Summe ihrer Halbmesser von einander abstehen, so **berühren** die beyden Kreise einander **von außen**.



Bew. Es sey CK die Summe der beyden Halbmesser, so haben die beyden Kreise außer dem Punkt B (welcher auf der geraden Linie CK liegt) keinen Punkt weiter mit einander gemein.

Denn es sey A irgend ein anderer Punkt auf der Peripherie des Kreises um K, so ist

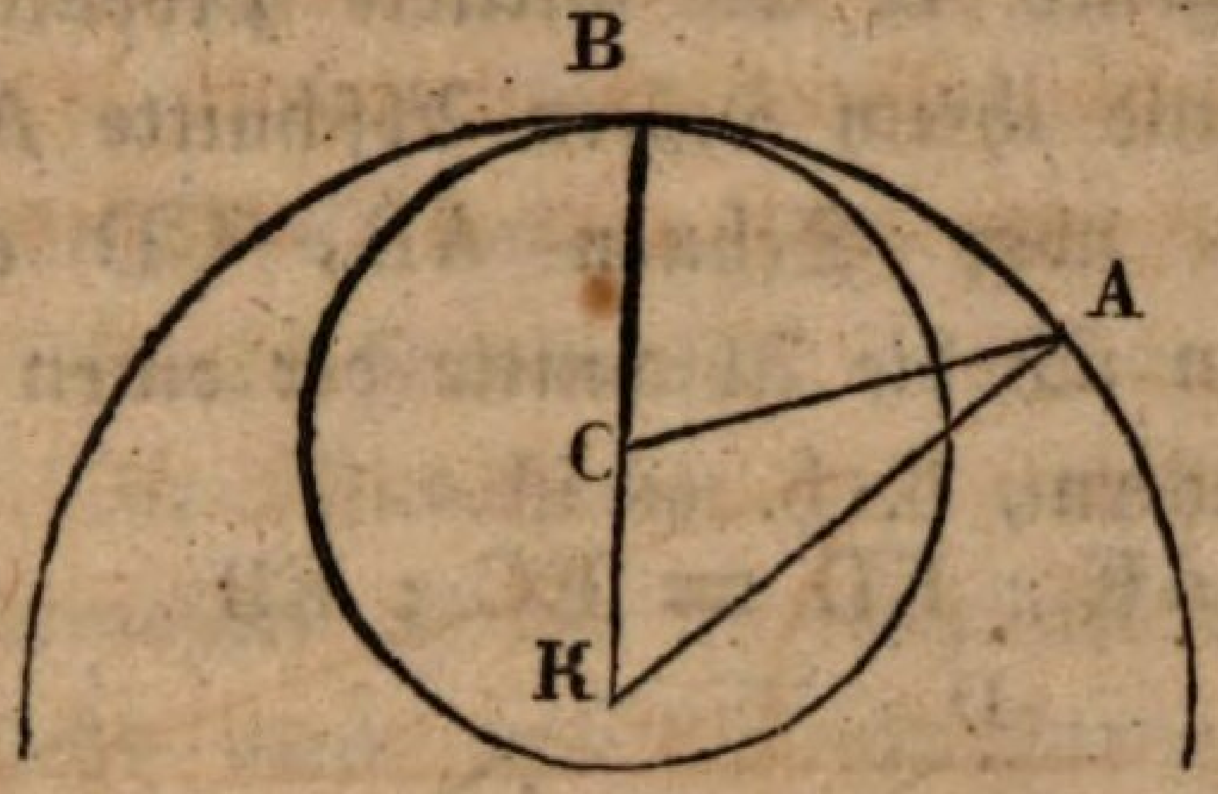
$$CA + AK > CB + BK \ (53)$$

also (Ar.)

$$CA > CB$$

folglich der Punkt A außerhalb des Kreises um C.

§. 123. Wenn die Mittelpunkte zweyer Kreise um die Differenz ihrer Halbmesser von einander abstehen, so berühren die beyden Kreise einander von innen.



Bew. Es sey KB der Halbmesser des äußern, CB der Halbmesser des innern Kreises, also KC die Differenz beyder Halbmesser; so haben die Peripherien beyder Kreise außer dem Punkt B keinen Punkt weiter mit einander gemein, und jeder andere Punkt A auf der Peripherie des Kreises um K liegt außerhalb des Kreises um C.

Denn es ist

$$AC + CK > AK \ (53)$$

also auch, da $AK = BK = BC + CK$ ist,

$$AC + CK > BC + CK$$

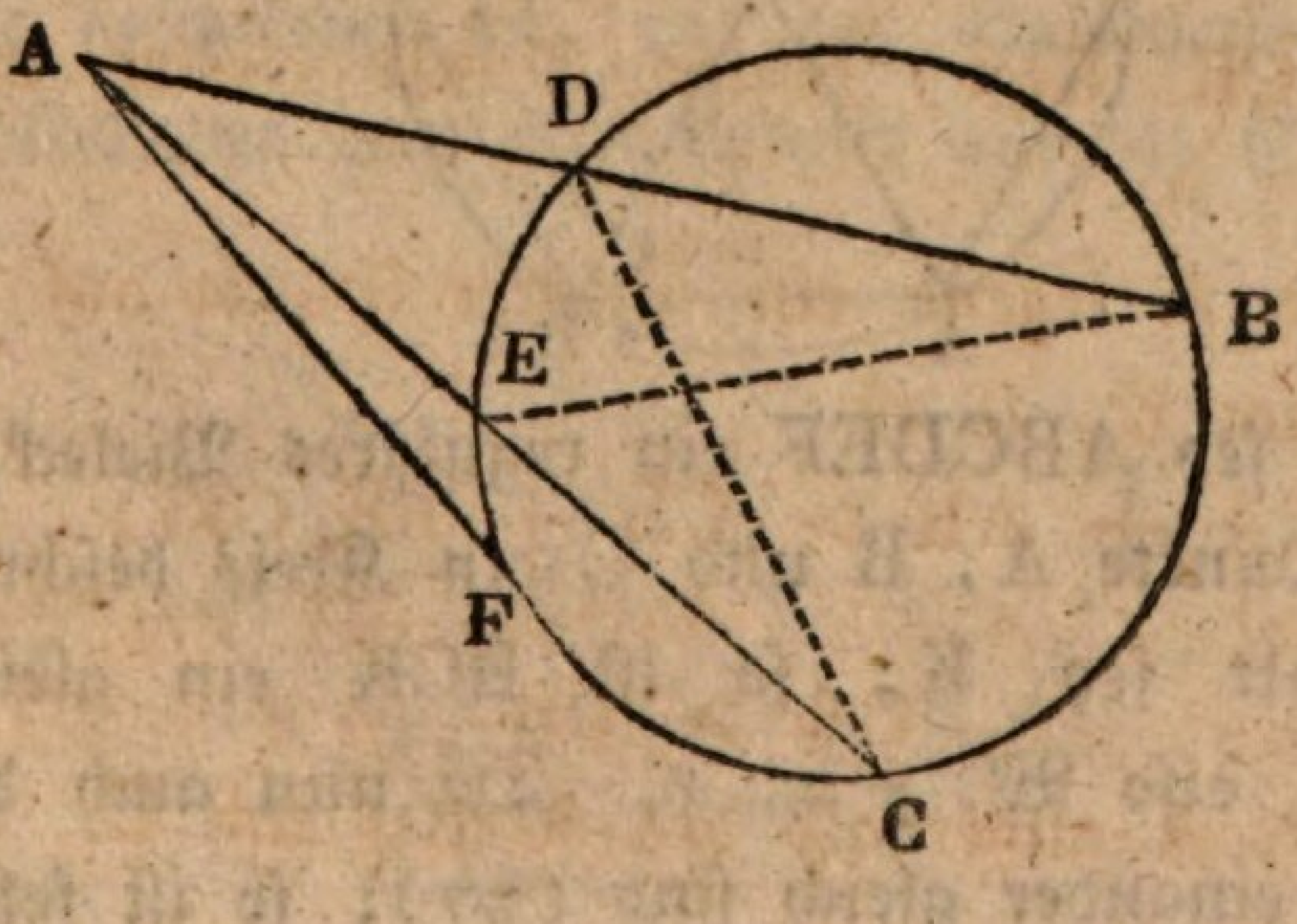
folglich (Ax.)

$$AC > BC$$

d. i. größer als der Halbmesser des Kreises um C.

§. 124. Wenn von einem Punkt A außerhalb des Kreises gerade Linien AB und AC durch den Kreis gezogen werden; so verhalten sie sich umgekehrt wie ihre äußern Abschnitte, d. h. es ist

$$AB : AC = AE : AD$$

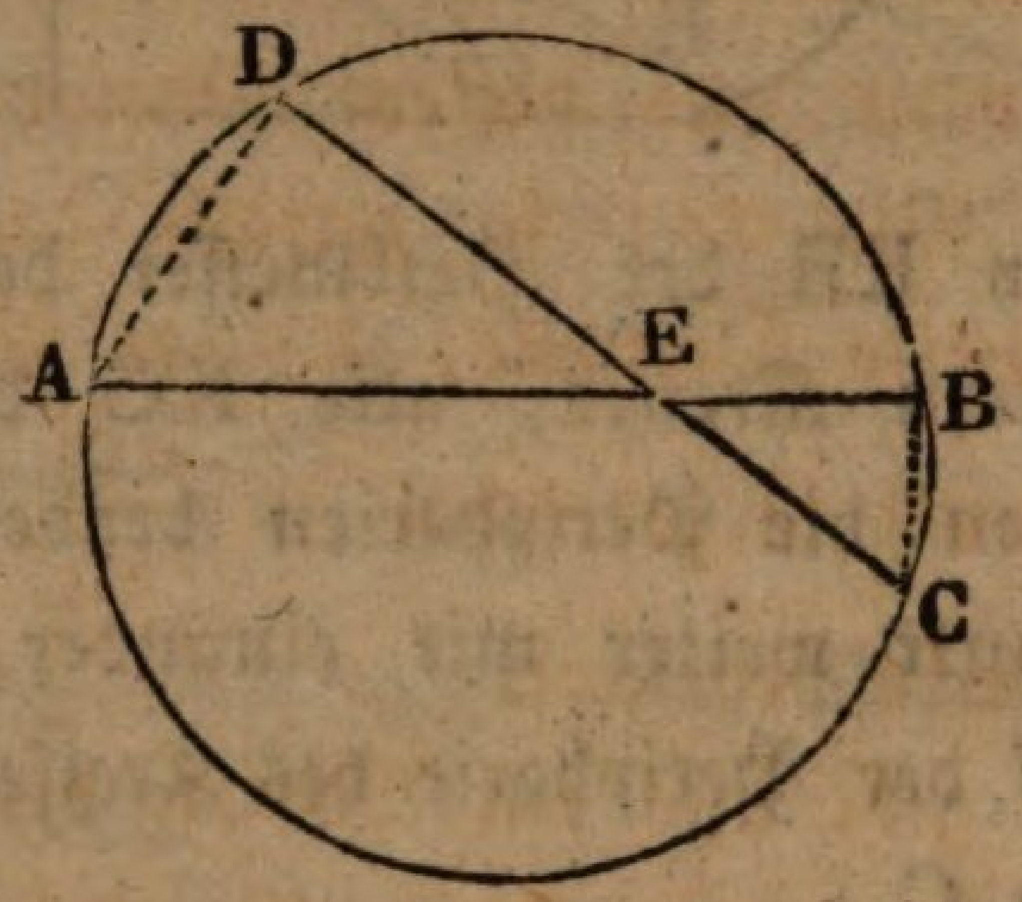


Bew. Es ist nähmlich Δ ABE ∽ ACD (§. 85 und 112).

§. 125. Denkt man sich die Linie AEC um A herum gedreht, bis sie in die Lage AF kommt, welche den Kreis in F berührt; so ist die Tangente AF die mittlere Proportionallinie zwischen der Linie AB und ihrem äußern Abschnitte AD.

§. 126. Wenn zwey Sehnen AB, CD einander in E schneiden, so verhalten sich die Abschnitte der einen umgekehrt wie die Abschnitte der andern, d. h. es ist

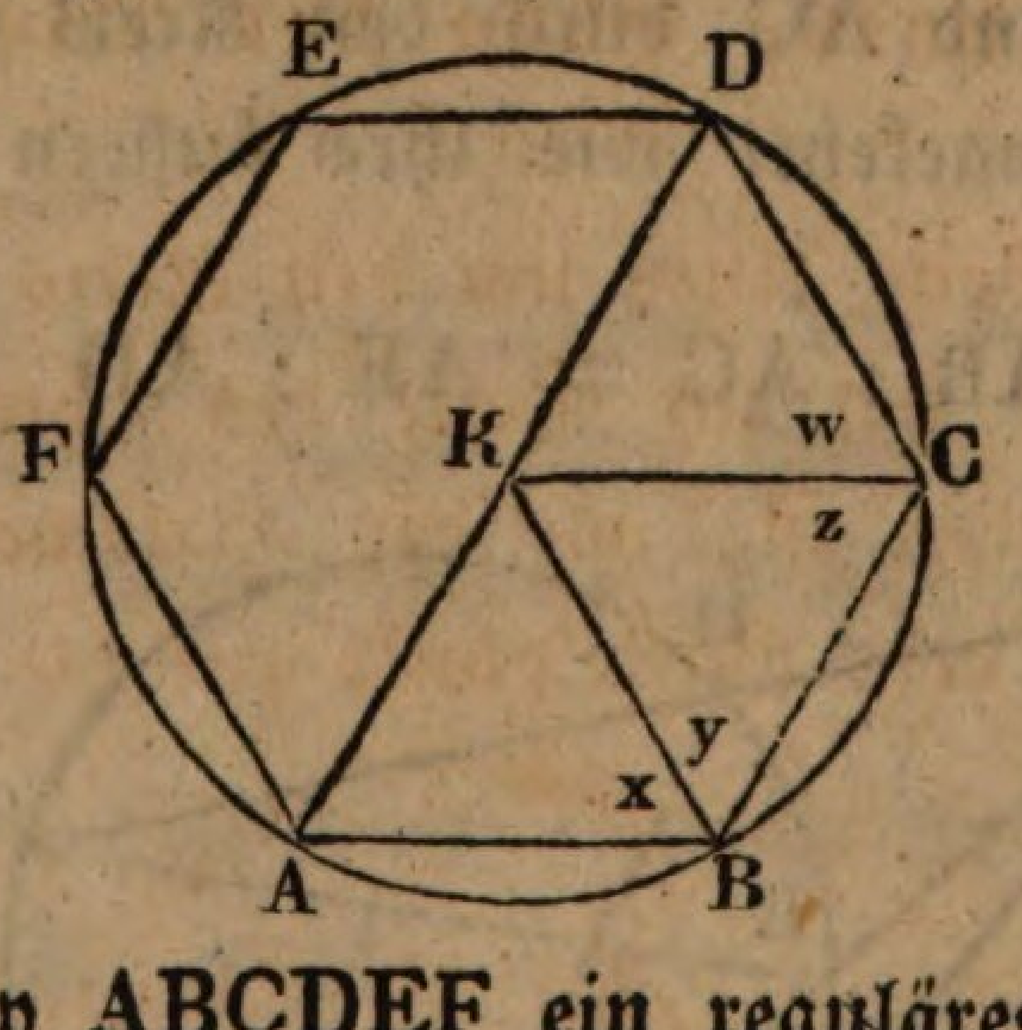
$$AE : ED = EC : EB$$



Bew. Es ist wieder Δ AED ∽ CEB (§. 85).

§. 127. Eine Figur heißt in dem Kreis beschrieben, wenn alle Ecken derselben in die Peripherie desselben Kreises fallen, um den Kreis beschrieben aber, wenn alle ihre Seiten an der Peripherie desselben Kreises tangent sind. In jenem Falle heißt der Kreis um, in diesem in der Figur beschrieben.

§. 128. Die Ecken eines jeden regulären Vielecks liegen in der Peripherie desselben Kreises.



Bew. Es sey ABCDEF ein reguläres Vieleck, so läßt sich durch die drey Punkte A, B und C ein Kreis beschreiben (107). Sein Mittelpunkt sey K; so ist BCK ein gleichschenklichtes Dreyeck (101), also W. $y = z$. Da nun auch die Polygonwinkel B und C einander gleich sind (27); so ist folglich $x = w$.

In den beyden Dreyecken KCD und KBA hat man also KC = KB, CD = BA (Voraussf.) und W. w = x. Sie sind folglich congruent (39). Folglich ist auch KD = KA (41). Es liegt also auch der vierte Punkt D in der Peripherie des Kreises um K.

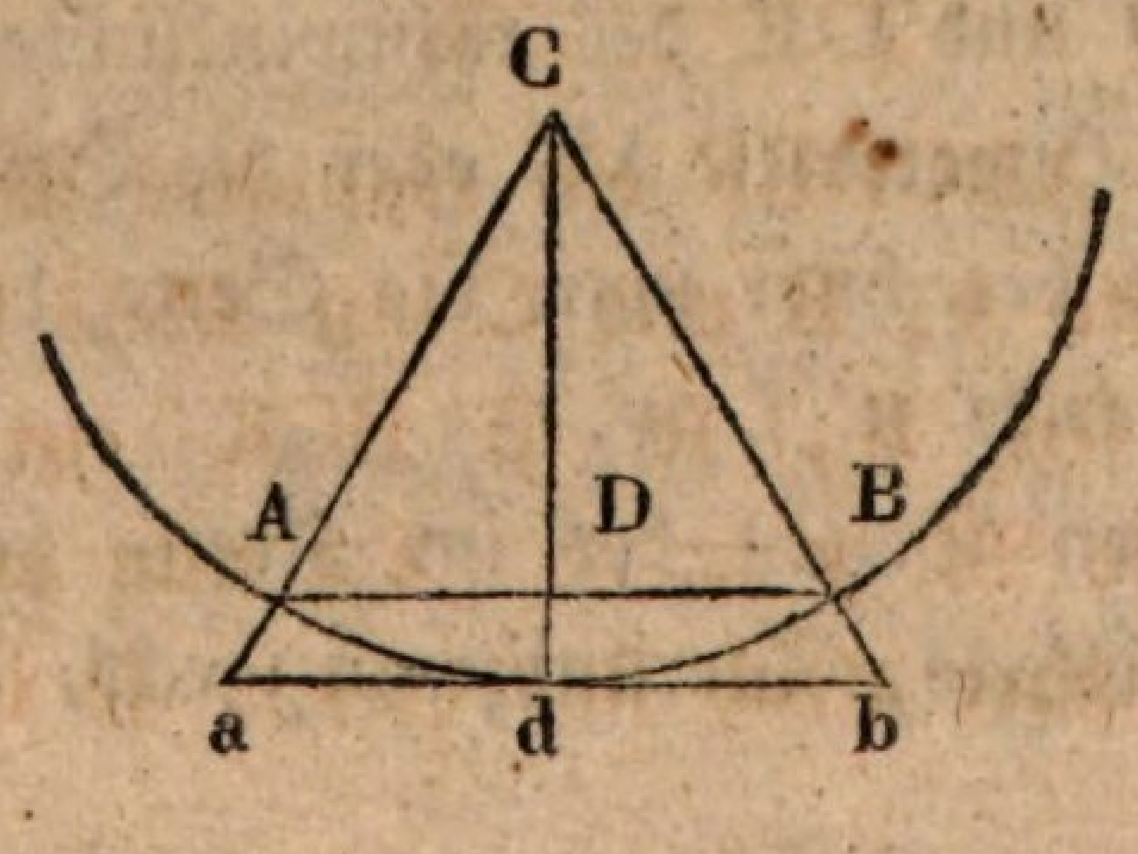
Auf dieselbe Weise ließe es sich von allen übrigen Punkten des regulären Vielecks beweisen.

§. 129. Der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises läßt sich also gewissermaßen als der Mittelpunkt des regulären Vielecks betrachten. Zieht man aus diesem Mittelpunkt die Halbmesser nach den Ecken des Vielecks, so zerfällt das Vieleck dadurch in eben so viele congruente Dreyecke, als es Seiten hat; und der Winkel am Mittelpunkt ist jedesmal $= \frac{4\,\mathfrak{R}}{n}$, wenn n die Anzahl der Seiten des Vielecks bedeutet.

§. 130. Dieß gibt uns ein Mittel, den Inhalt eines regulären Vielecks bequemer als nach §. 78 zu bestimmen. Man bestimme den Inhalt eines der congruenten Dreyecke und multiplicire ihn mit der Seitenzahl des Vielecks.

Die Seite des Vielecks sey = s, das Perpendikel aus dem Mittelpunkt auf die Seite = h, so ist der Inhalt eines solchen Dreyecks $= \frac{1}{2}$ hs (§. 77); also der Inhalt eines Vielecks von n Seiten $= \frac{1}{2}$ h . ns, d. h. = dem Product aus dem Umfange in die halbe Höhe des Dreyecks nach dem Mittelpunkte.

§. 131. Die Seite eines um den Kreis beschriebenen regulären Vielecks verhält sich zur Seite des ähnlichen Vielecks, das in dem Kreis beschrieben ist, wie der Halbmesser des Kreises zu dem Perpendikel aus dem Mittelpunkt auf die Seite des inneren Vielecks.

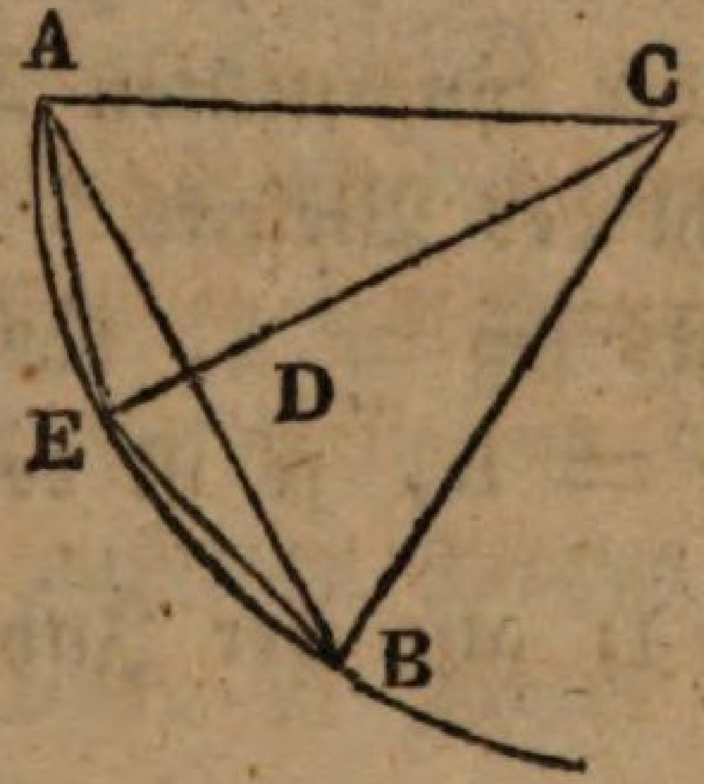


Bew. Es sey AB die Seite eines in dem Kreise beschriebenen regulären Vielecks von beliebiger Seitenzahl, Cd ein Perpendikel aus dem Mittelpunkt durch dieselbe, und ab zwischen den Verlängerungen der Halbmesser CA und CB in d tangent; so ist ab die Seite des ähnlichen um den Kreis beschriebenen Vielecks, und es verhält sich

ab : AB = Ca : CA = Cd : CD (§. 91 und 89).

§. 132. Der Winkel am Mittelpunkt eines regulären Sechsecks ist = 60° (129), also im Δ BKC (s. Fig. zu §. 128) W. y + z = 120°, folglich jeder = 60°, also Dreyeck BKC gleichseitig (50), folglich BC = BK, oder die Seite des regulären Sechsecks ist dem Halbmesser des umschriebenen Kreises gleich.

§. 133. Aus der Seite des im Kreis beschriebenen regulären Sechsecks läßt sich die Seite des regulären Zwölfecks, aus dieser die Seite des Vierundzwanzigecks u. s. w. berechnen.



Denn es sey AB die Seite eines regulären Sechsecks, C der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises. Man ziehe CE senkrecht durch AB und ziehe AE, so ist AE die Seite des in demselben Kreise beschriebenen regulären Zwölfecks. Im rechtwinklichten Dreyeck ADC ist die Hypotenuse CA = der Seite, und der Kathete AD = der halben Seite des Sechsecks. Daraus läßt sich CD finden (§. 79). CE ist ebenfalls der Seite des Sechseckes gleich. Man hat also auch DE = CE — DC. Aus den beyden Katheten AD und DE des rechtwinklichten Dreyecks ADE hat man endlich die Hypotenuse AE oder die Seite des Zwölfecks.

Auf dieselbe Art berechnet man die Seite des Vierundzwanzigecks, Achtundvierzigecks u. s. w.

§. 134. Aus den Seiten des im Kreise beschriebenen regulären Sechsecks, Zwölfecks, Vierundzwanzigecks, Achtundvierzigecks

u. s. w. lassen sich die Seiten der um den Kreis beschriebenen nach §. 131 finden. Je weiter man diese Rechnung fortsetzt, desto kleiner findet man die Differenz zwischen dem Umfang des um und des in dem Kreise beschriebenen Vielecks, desto mehr nähert man sich also dem wahren Umfang des Kreises. Auf diesem Wege findet man das Verhältniß der Peripherie zum Halbmesser = 6, 28 : 1, also das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser = 3, 14 : 1.

Die Zahl 3, 14 bezeichnet man gewöhnlich mit π.

§. 135. Bezeichnet man den Halbmesser mit r, den Durchmesser mit d, die Peripherie mit p und den Flächeninhalt mit a, so hat man folgende Sätze:

I) $p = \pi \cdot d$ oder $p = 2\pi r$ (134)

II) $d = \frac{p}{\pi}$ oder $r = \frac{p}{2\pi}$ (I)

III) $a = \pi \cdot r^2$ oder $a = \frac{1}{4}\pi d^2$

Denn der Kreis läßt sich als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten, dessen Umfang = der Peripherie, und wo die Höhe des Dreyecks nach dem Mittelpunkt = dem Halbmesser ist. Der Inhalt desselben ist also, nach §. 130, = dem Producte aus der Peripherie in den halben Halbmesser = $\pi \cdot 2r \cdot \frac{1}{2} r = \pi r^2$. Ferner ist $r = \frac{1}{2} d$, also $r^2 = \frac{1}{4} d^2$.

IV) $r = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$ oder $d = \sqrt{\frac{a}{\frac{1}{4}\pi}}$ (III).

§. 136. Aus §. 135 No. III folgt: Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmesser. — Dieß könnte man auch aus §. 95 folgern, da alle Kreise einander ähnlich sind.

§. 137. Einige zum Abschnitt vom Kreise gehörige Aufgaben:

a) durch drey gegebene Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu ziehen (vergl. 106 und 107).

b) Zu zwey gegebenen Linien die mittlere geometrische Proportionallinie zu finden (vgl. 116 und 117).

c) Mit Hülfe des Kreises und des Transporteurs ein reguläres Vieleck von n Seiten zu beschreiben (vgl. 128 und 129).

d) Die Länge eines Bogens von n Graden zu finden, wenn der Halbmesser gegeben ist, und ähnliche Aufgaben.

2. Stereometrie.

Lage der Ebenen gegen Punkte, Linien und Ebenen.

§. 138. Eine Fläche, welche so beschaffen ist, daß alle gerade Linien, die sich von jedem Punkte nach jedem andern Punkte derselben ziehen lassen, ganz in die Fläche fallen, heißt eine ebene Fläche oder Ebene.

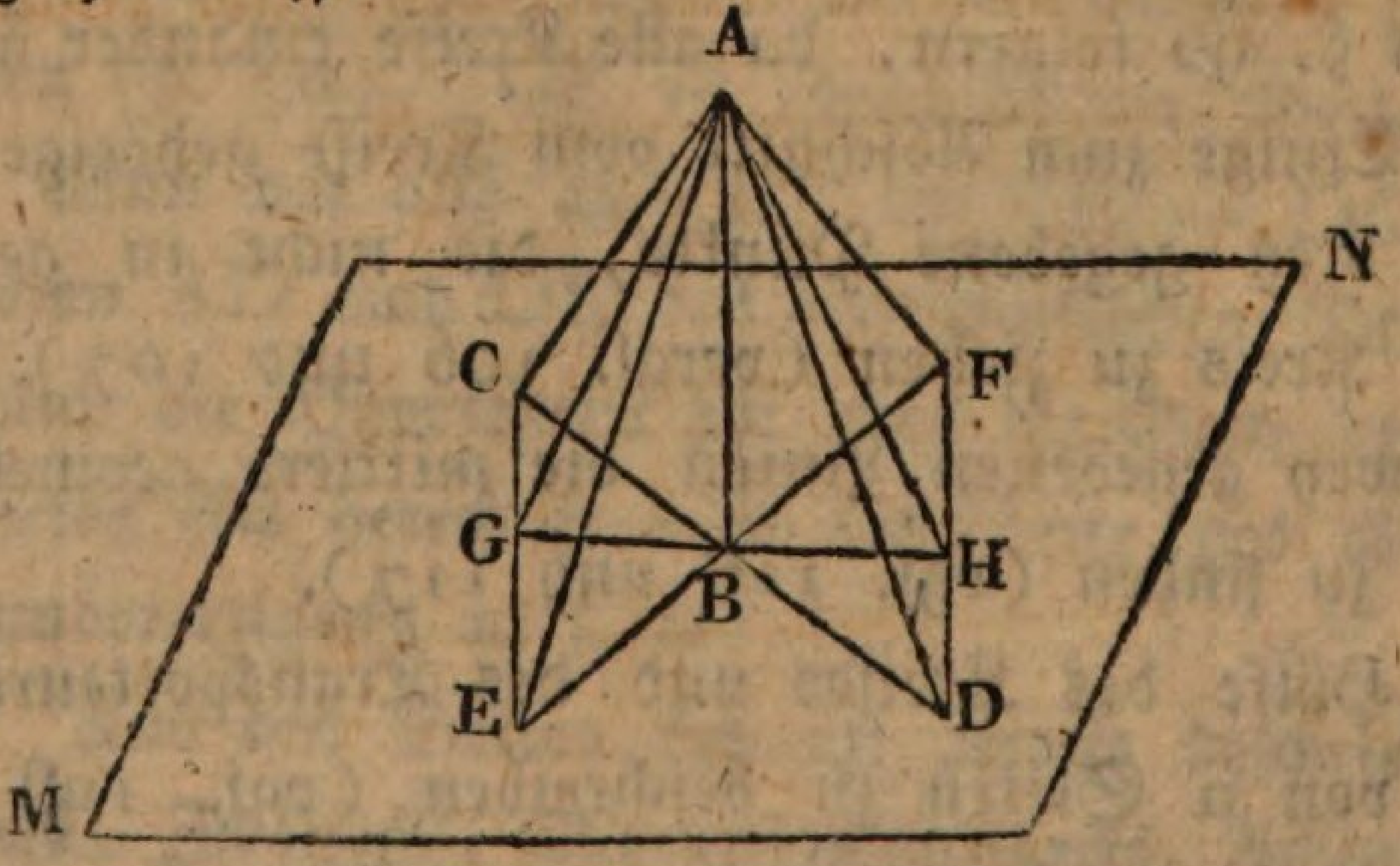
§. 139. Drey Punkte liegen jedesmal in derselben Ebene.

Bew. Wenn die drey Punkte in derselben geraden Linie liegen, so ist die Sache von selbst klar. Liegen sie aber nicht in derselben geraden Linie; so ziehe man eine gerade Linie durch zwey derselben, und lege durch diese gerade Linie eine Ebene. Diese Ebene läßt sich nun um die gerade Linie wie um eine Axe drehen. Irgendwo wird sie dann dem dritten Punkte begegnen.

§. 140. Also liegen auch zwey Linien, die einander schneiden, in derselben Ebene.

§. 141. Drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, bestimmen die Lage einer Ebene. Denn es gibt (§. 139) nur eine einzige Lage, in welcher die Ebene dem dritten Punkt begegnet.

§. 142. Eine gerade Linie, welche auf zweyen Linien, die sich schneiden, zugleich senkrecht steht, steht auf allen andern Linien senkrecht, welche sich von jenem Durchschnittspunkt aus auf der Ebene ziehen lassen.



Bew. CD und EF in der Ebene MN seyen zwey Linien, auf welchen AB zugleich senkrecht steht, GH sey irgend eine andere Linie in der Ebene MN durch den Durchschnittspunkt B. Man mache $BC = BD$, und $BE = BF$, so wird auch $AC = AD$ und $AE = AF$ (§. 38 und 41), und

1) $\triangle EBC \cong FBD$ (§. 39 und 14)

also auch $EC = FD$ und W. $BCE = BDF$. Daraus ergibt sich

2) $\triangle BCG \cong BDH$ (§. 40 und 14)

also auch $CG = DH$ und $BG = BH$.

Ferner ist

3) $\triangle ACE \cong ADF$ (§. 38)

daher auch W. $ACG = ADH$, mithin

4) $\triangle ACG \cong ADH$ (§. 40 und No. 2)

woraus sich $AG = AH$ ergibt.

Da also $AG = AH$, $BG = BH$ (No. 2) und $AB = AB$ (Ax.), so ist endlich

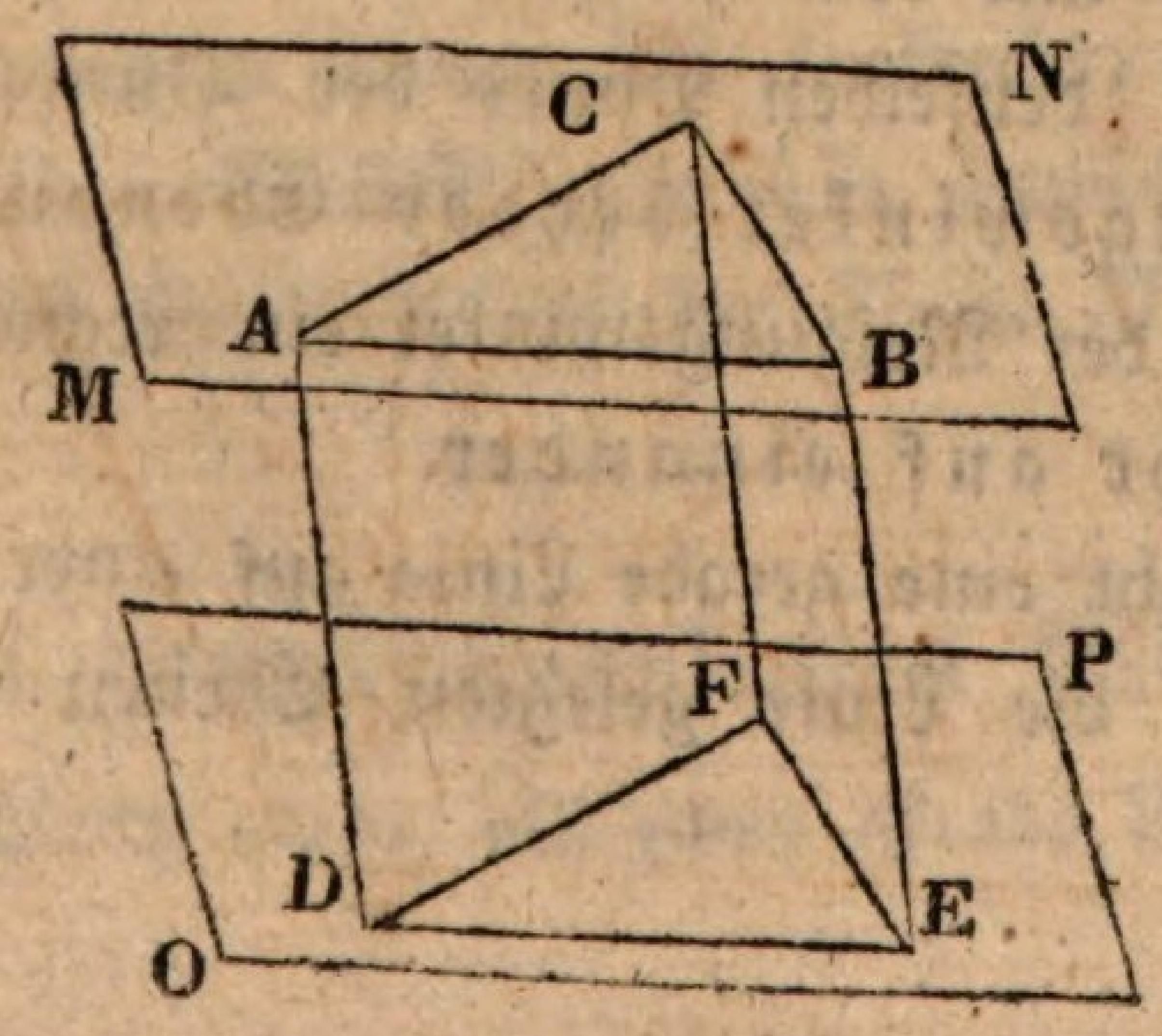
6) $\triangle ABG \cong ABH$ (§. 38)

folglich auch W. $ABG = ABH$, also jeder ein Rechter (§. 7) und AB senkrecht auf GH.

§. 143. Von einer geraden Linie, welche auf allen Linien, die sich von ihrem Durchschnittspunkt aus auf der Ebene ziehen lassen, senkrecht steht, sagt man: sie stehe auf der Ebene senkrecht.

Also steht eine gerade Linie auf einer Ebene senkrecht, sobald sie nur auf zweyen Linien in der Ebene zugleich senkrecht steht.

§. 144. Zwey in verschiedenen Ebenen liegende Winkel, welche von parallelen Linien gebildet werden, sind einander gleich.



Bew. Die beyden Ebenen seyen MN und OP, und es sey AB || DE und AC || DF, so ist zu beweisen, daß der Winkel BAC = EDF sey.

Man mache AB = DE und AC = DF, und ziehe CB, FE, AD, CF, BE; so ist, da AB ⧺ DE, das Viereck ABED ein Parallelogramm (59), also auch BE ⧺ AD. Eben so ist CF ⧺ AD. Folglich auch BE ⧺ CF. Mithin CBEF ein Parallelogramm, und CB = EF (56).

Die beyden Dreyecke ABC und DEF sind also congruent (38); folglich W. BAC = EDF (41).

§. 145. Ständen AD, BE, CF senkrecht auf der Ebene MN, so ständen sie auch auf der Ebene OP senkrecht.

Ueberhaupt steht jedes andere Perpendikel auf der Ebene MN auch senkrecht auf OP, und ist mit jenen gleich groß. Da diese Perpendikel aber die kleinsten Linien sind, die von der einen Ebene zur andern gezogen werden können, so bestimmen sie den Abstand beyder Ebenen von einander.

§. 146. Zwey Ebenen, welche überall gleich weit von einander abstehen, heißen parallele Ebenen. Parallele Ebenen treffen also auch, soweit man sie verlängern mag, nicht zusammen.

§. 147. Wenn zwey parallele Ebenen von einer dritten Ebene durchschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien parallel.

Denn beyde Durchschnittslinien liegen in derselben Ebene, und treffen nirgends zusammen (§. 61).

§. 148. Ebenen, die nicht parallel sind, werden, gehörig verlängert, sich in einer geraden Linie schneiden. Der Winkel, den das Perpendikel, das man in der einen Ebene auf die Durchschnittslinie zieht, mit dem Perpendikel macht, das man in der andern Ebene auf denselben Punkt der Durchschnittslinie fällt, heißt der Neigungswinkel beyder Ebenen.

§. 149. Ist der Neigungswinkel ein rechter, so stehen die Ebenen senkrecht auf einander.

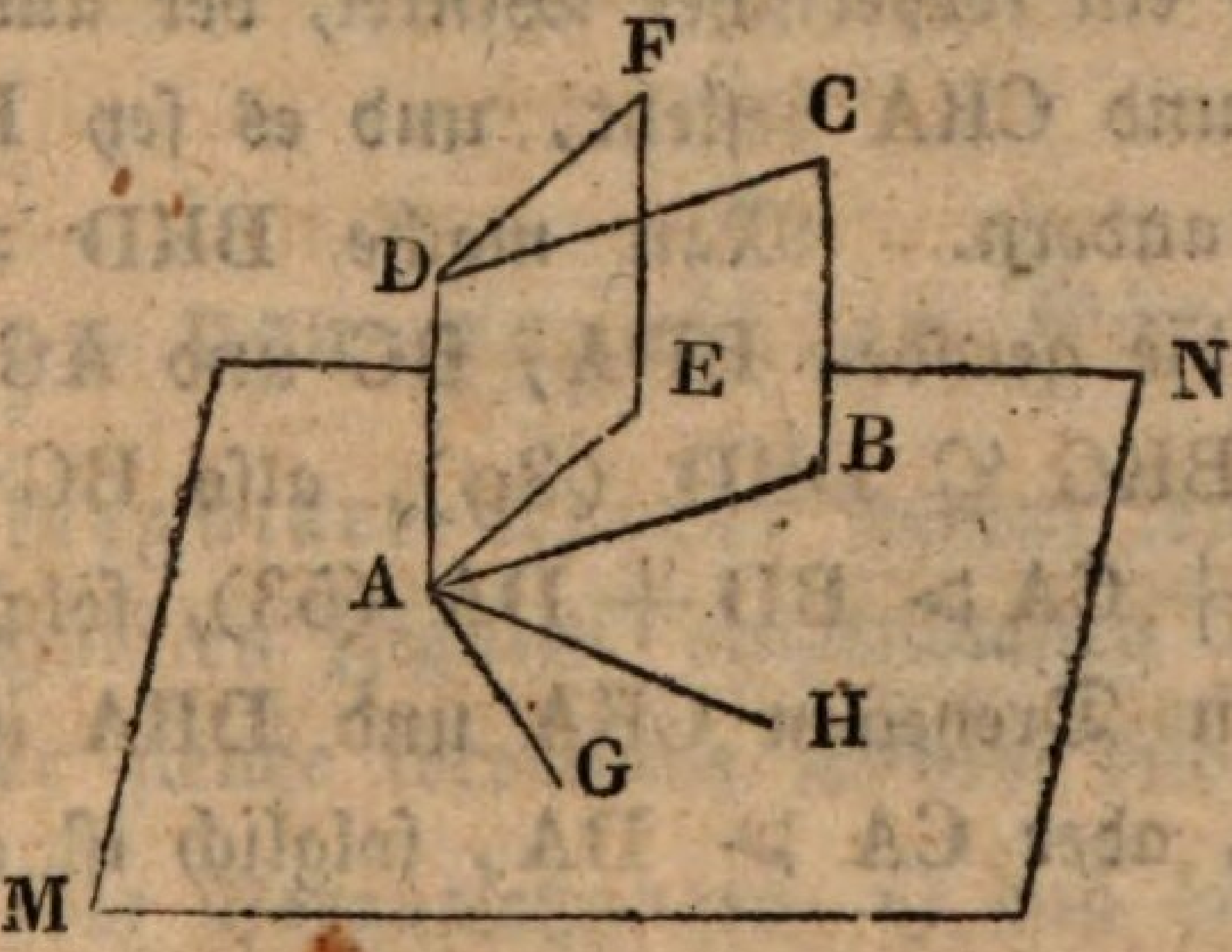
§. 150. Steht eine gerade Linie auf einer Ebene senkrecht, so sind alle durch die Linie gelegten Ebenen auf jener Ebene senkrecht.

Denn der Neigungswinkel dieser Ebenen gegen jene ist jedesmal ein Rechter.

§. 151. Steht eine Ebene auf einer andern Ebene senkrecht, so steht auch das Perpendikel, das man in der einen Ebene auf die Durchschnittslinie fällt, auf der ganzen andern Ebene senkrecht.

Denn dieß Perpendikel steht außer der Durchschnittslinie auch noch, da der Neigungswinkel beyder Ebenen ein Rechter ist (§. 149), auf demjenigen Perpendikel senkrecht, das man in der andern Ebene auf die Durchschnittslinie fällt (§. 148); es steht also auf zweyen Linien in der andern Ebene, folglich auf der ganzen andern Ebene senkrecht (§. 143).

§. 152. Wenn zwey Ebenen, die sich schneiden, auf einer dritten Ebene zugleich senkrecht stehen, so steht ihre Durchschnittslinie auf der dritten Ebene senkrecht.



Bew. Es seyen die beyden Ebenen AC und AF auf MN senkrecht, AD sey ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie, und AB und AE seyen die Durchschnittslinien derselben mit der Ebene MN.

Man ziehe in der Ebene MN die Linie GA senkrecht auf AB und HA senkrecht auf AE; so ist GA auf der ganzen Ebene AC senkrecht (151) also auch senkrecht auf der Linie AD, und HA ist auf der ganzen Ebene AF senkrecht, also auch senkrecht auf der Linie AD. Es steht also AD sowohl auf AG, als auf AH senkrecht, also senkrecht auf der Ebene MN (143).

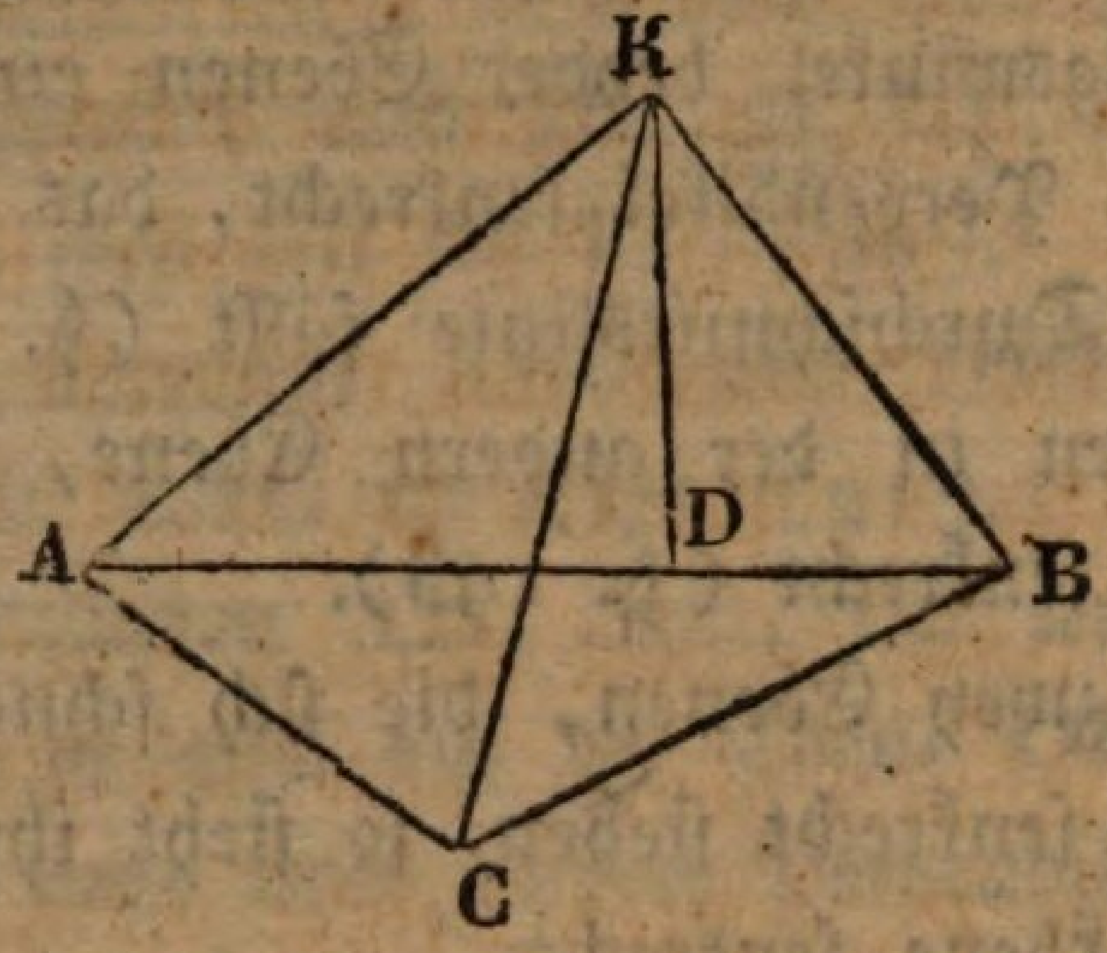
Von den körperlichen Winkeln.

§. 153. Wenn mehr als zwey gerade Linien, von welchen

immer nur zwey in derselben Ebene liegen, in Einem Punkt zusammen treffen, so bilden sie einen körperlichen Winkel oder Ecke.

Der körperliche Winkel wird von eben so viel ebenen Winkeln eingeschlossen, als der geraden Linien sind.

§. 154. Wenn ein körperlicher Winkel aus drey ebenen besteht, so sind je zwey zusammen größer als der dritte.



Bew. K sey ein körperlicher Winkel, der aus den drey ebenen BKA, BKC und CKA besteht, und es sey BKA größer als jeder der beyden andern. Man mache BKD = BKC, KD = KC und ziehe die geraden BDA, BC und AC.

Dann ist Δ BKC ≌ BKD (39), also BC = BD (41).

Nun ist BC + CA > BD + DA (53), folglich CA > DA.

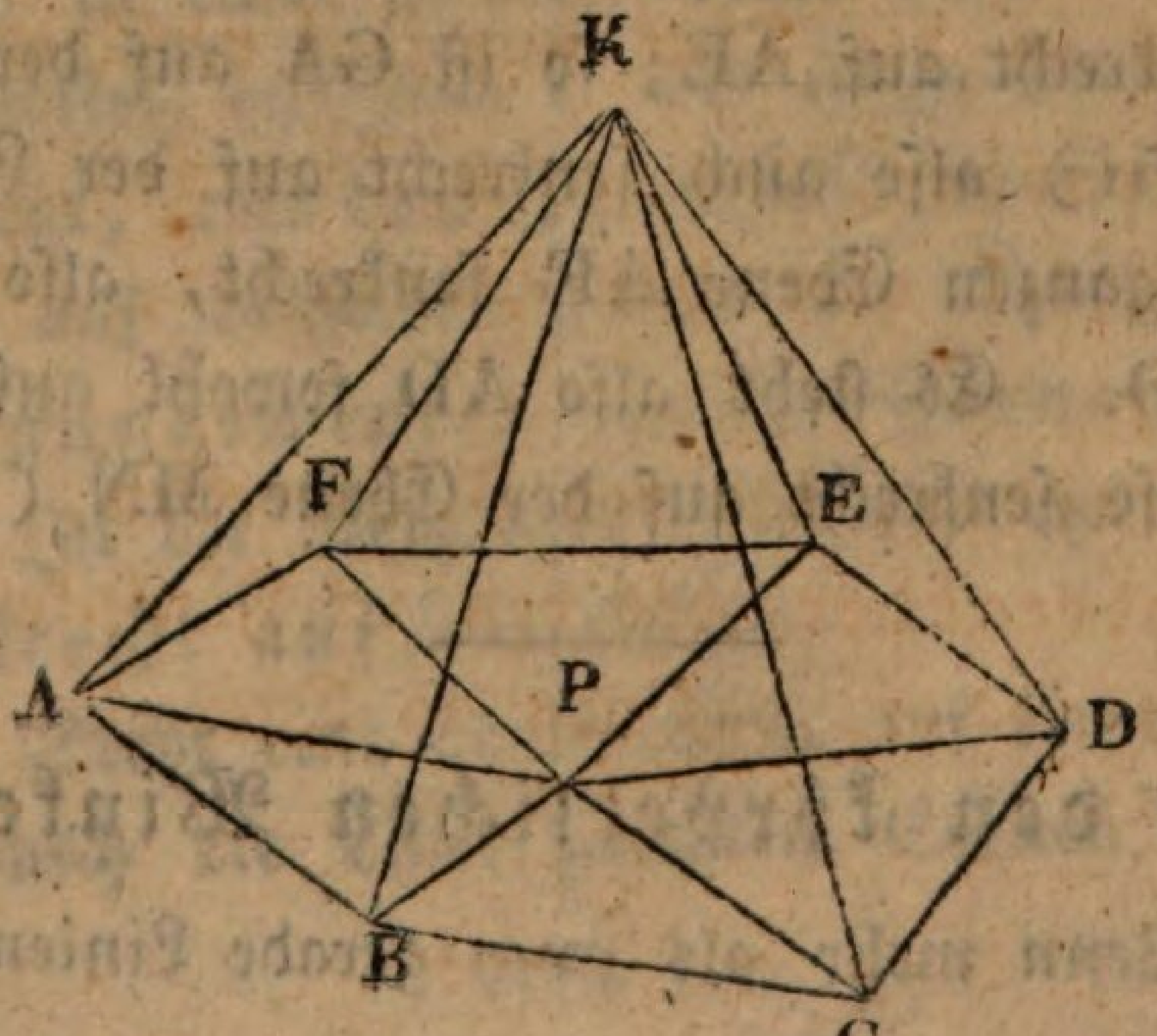
In den beyden Dreyecken CKA und DKA ist nun KA = KA, KC = KD, aber CA > DA, folglich ist auch W. CKA > DKA (54).

Folglich auch BKC + CKA > BKD + DKA

oder

BKC + CKA > BKA.

§. 155. Die Summe aller ebenen Winkel, die einen körperlichen bilden, ist jedesmal kleiner als 4 R.



Bew. Es sey K ein körperlicher Winkel, der von sechs ebenen gebildet wird; man durchschneide die Schenkel derselben durch die Ebene ABCDEF, nehme auf derselben einen beliebigen Punkt P an, und ziehe die Linien PA, PB u. s. w.

Es sind die achtzehn Winkel der Dreyecke um K = den achtzehn Winkeln der Dreyecke um P (28).

Nun ist aber W. KBA + KBC > PBA + PBC (154), u. s. w.; oder die zwölf Winkel der Dreyecke um K sind größer als die zwölf Winkel der Dreyecke um P, welche mit einander die sechs körperlichen Winkel A, B, C, D, E, F bilden.

Folglich sind die sechs übrigen Winkel jener Dreyecke kleiner als die sechs übrigen Winkel dieser, oder die Winkel um K kleiner als die Winkel um P, folglich kleiner als 4 R. (§. 12).

Von den regulären Körpern.

§. 156. Reguläre Körper heißen solche, die von lauter congruenten regulären Figuren eingeschlossen werden, welche an den Ecken lauter gleiche körperliche Winkel bilden.

§. 157. Die Voraussetzungen 1) daß die Figuren regulär, 2) daß sie congruent, und 3) daß die körperlichen Winkel unter einander gleich seyen, setzen uns, da wenigstens drey ebene Winkel zu einem körperlichen erfordert werden (153), und die Summe von allen ebenen Winkeln desselben weniger als 4 R. betragen muß (155), in Stand, alle möglichen regulären Körper aufzuzählen, deren es in der That nur fünf verschiedene Arten gibt:

a) das Tetraëder, das von 4 Dreyecken,
b) der Würfel oder das Hexaëder, das von 6 Quadraten,
c) das Octaëder, das von 8 Dreyecken,
d) das Dodecaëder, das von 12 Fünfecken,
e) das Icosaëder, das von 20 Dreyecken

begränzt wird.

Von den prismatischen Körpern oder Prismen.

§. 158. Prisma heißt ein Körper, der zwey congruente und parallele Figuren zu Grundflächen, und eben so viele Parallelogramme zu Seitenflächen hat, als die Grundflächen Seiten haben.

Sind die Grundflächen ebenfalls Parallelogramme, so heißt das Prisma ein Parallelepipedum.

Man theilt die Prismen in gerade und schiefe, und nennt sie, nach der Seitenzahl der Grundflächen, dreyseitige, vierseitige, fünfseitige u. s. w. — Der Würfel (§. 157 b.) ist ein Parallelepipedum, das von 6 Quadraten begränzt ist.

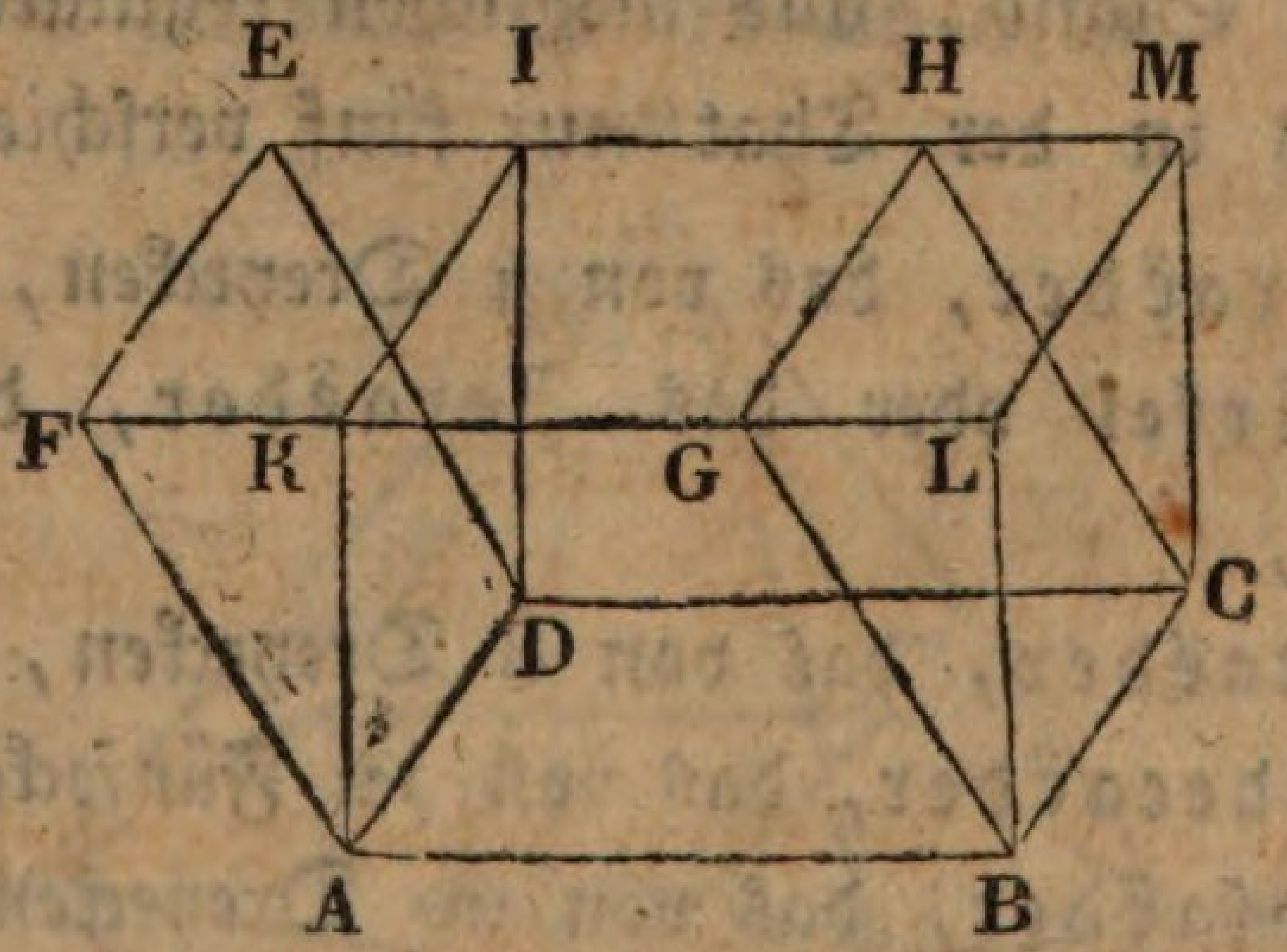
§. 159. Prismatische Körper sind überall gleich dick, d. h. wo man sie mit den Grundflächen parallel durchschneidet, ist die Durchschnittsfläche mit den Grundflächen congruent, also auch gleich groß.

§. 160. Bey einem prismatischen Körper verhalten sich also die durch parallele Schnitte abgeschnittenen Stücke wie die zugehörigen Seitenflächen.

§. 161. Jede zwey gegen über liegende Seitenflächen eines Parallelepipedums lassen sich als Grundflächen dieses prismatischen Körpers ansehen.

§. 162. Jedes Parallelepipedum läßt sich in zwey congruente dreyseitige Prismen zerlegen, auf eine ähnliche Art, wie das Parallelogramm in zwey congruente Dreyecke.

§. 163. Parallelepipeden von gleicher Höhe über derselben Grundfläche haben gleichen Inhalt.



Bew. Erster Fall, wenn von beyden Parallelepipeden zwei Seitenflächen in dieselbe Ebene fallen. Die beyden Parallele-

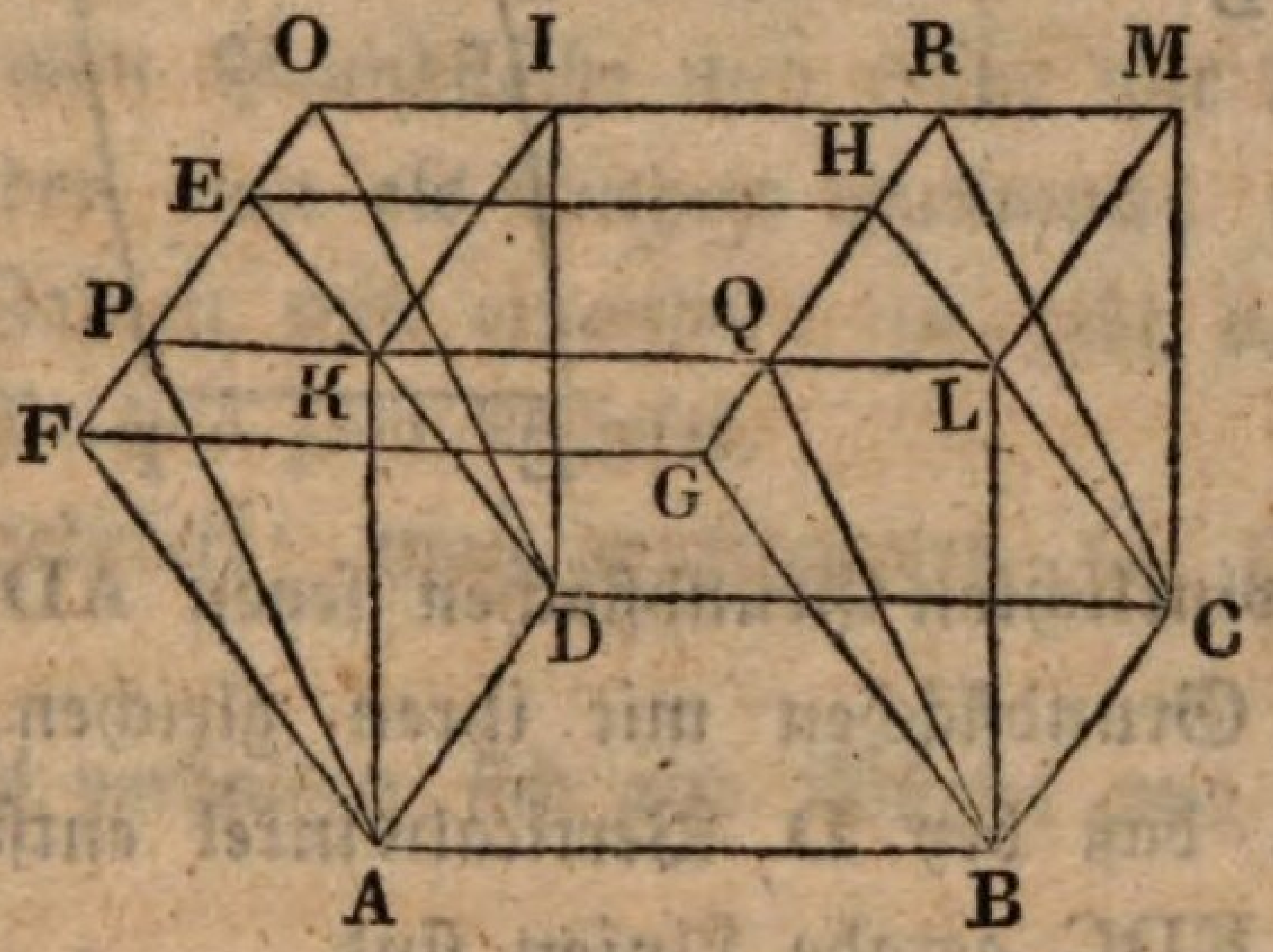
pipeden seyen AH und AM auf derselben Grundfläche AC. Es sollen von beyden die vorderen Seitenflächen AG und AL, und die hinteren DH und DM in dieselbe Ebene fallen.

Alsdann ist das dreyseitige Prisma AIF congruent mit BMG, also, indem man zu beyden das Prisma ACGI addirt,

Prisma AIF + ACGI = BMG + ACGI

oder

Parallelepipedum AH = AM.



Zweyter Fall, wenn von beyden Parallelepipeden keine Seitenflächen in dieselbe Ebene fallen. Die beyden Parallelepipeden seyen AH und AM. Man ziehe ein Hülfsparallelepipedum AR, von welchem die Seitenflächen AO und BR mit den Seitenflächen AE und BH des ersten, und die Seitenflächen DR und AQ mit den Seitenflächen DM und AL des zweyten in dieselbe Ebene fallen. Alsdann ist nach dem ersten Fall

Parallelepipedum AH = AR

und

Parallelepipedum AM = AR

folglich

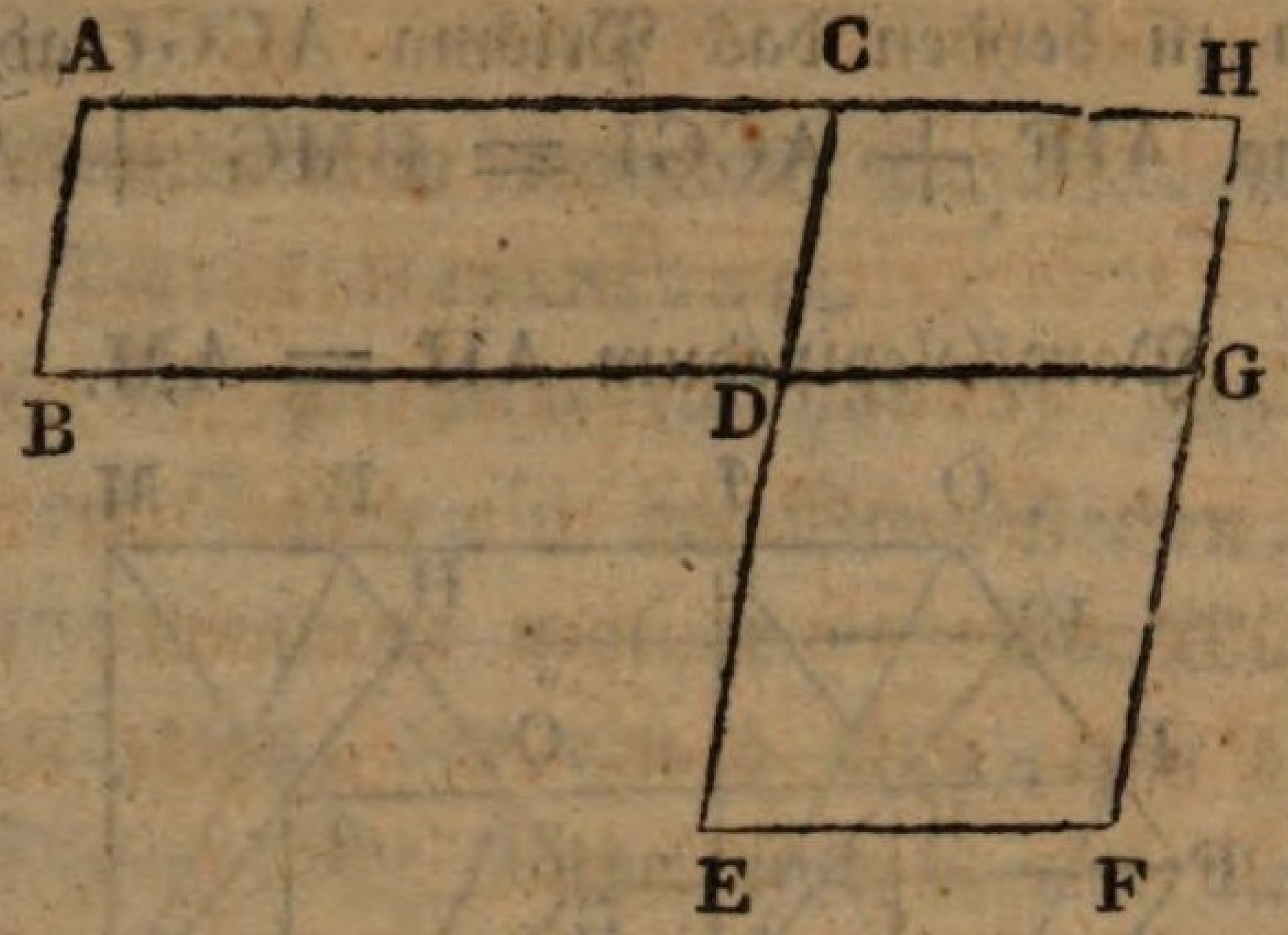
Parallelepipedum AH = Parall. AM.

§. 164. Betrachtet man im ersten Fall (§. 163) die beyden in dieselbe Ebene fallenden Seitenflächen als Grundflächen (161); so hat man zwey Parallelepipeden von derselben Höhe auf Parallelogrammen, welche gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben.

Es sind also auch alle gleich hohen Parallelepipeden von solcher Grundfläche einander gleich.

§. 165. Parallelepipeden von gleicher Höhe und gleich großer Grundfläche haben gleichen Inhalt.

Bew. Die Grundflächen sind entweder gleichwinklicht oder nicht. Im letzten Falle kann man für das eine Parallelepipedum (nach 164) ein solches setzen, dessen Grundfläche mit der Grundfläche des andern gleichwinklicht ist.



Die gleichwinklichten Grundflächen seyen AD und DF. Man setze die beyden Grundflächen mit ihren gleichen Winkeln bey D so an einander, daß bey D Verticalwinkel entstehen (13), daß also BDG und EDC gerade Linien sind.

Nun haben beyde Parallelepipeden entweder gleiche Neigung gegen die Grundfläche oder nicht. Im letzten Falle kann man für das eine Parallelepipedum (nach 163) ein solches setzen, das mit dem andern gleiche Neigung hat.

Man verlängere AC und FG, bis sie sich in H durchschneiden, so ist CDGH ein Parallelogramm. Man setze darüber ein Parallelepipedum, das mit den beyden andern gleiche Neigung gegen die Grundfläche hat. Alsdann machen die beyden Parallelepipeden über AD und CG zusammen ein Parallelepipedum, eben so die beyden über DF und CG zusammen ein Parallelepipedum aus; und es ist (nach 160)

Pp. über AD : Pp. über CG = AD : CG

und

Pp. über DF : Pp. über CG = DF : CG

folglich

Pp. über AD = Pp. über DF (I §. 103).

§. 166. Setzt man die Seite eines beliebigen Würfels = 1, so ist seine Grundfläche = 1 . 1, und das Product aus Grundfläche und Höhe = 1 . 1 . 1 = 1. Setzt man die

Grundfläche eines andern prismatischen Körpers = g, und seine Höhe = h, so ist (167)

Würfel: Prisma = 1 : gh

also enthält das Prisma gh solcher Würfel.

So wie man sich in der Planimetrie des Quadrats als Maß für die Flächen bedient (73), so gebraucht man in der Stereometrie den Würfel als Einheit zur Ausmessung der Körper.

§. 169. Um einen prismatischen Körper auszumessen, messe man Grundfläche und Höhe mit der Seite desjenigen Würfels, den man als Einheit annimmt, und multiplicire die erhaltenen Zahlen mit einander; so gibt das Product das Verhältniß des Prisma zum Würfel.

Kürzer ausgedrückt: man multiplicire die Grundfläche mit der Höhe.

§. 170. Es verhalten sich also Würfel wie die Cubiczahlen ihrer Seiten.

§. 171. Da sich der Kreis als ein Vieleck von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten betrachten läßt, so können die Grundflächen eines Prisma auch Kreise werden. Dann erhält man unendlich schmale Parallelogramme als Seitenflächen, welche zusammen eine krumme Seitenfläche bilden. Ein prismatischer Körper, dessen Grundflächen Kreise sind, heißt ein Cylinder. — Eine gerade Linie, welche die Mittelpunkte beyder Kreise mit einander verbindet, heißt des Cylinders Axe. Je nachdem diese auf den Grundflächen senkrecht oder schief steht, heißt der Cylinder selbst ein senkrechter oder schiefer.

§. 172. Was von den prismatischen Körpern überhaupt gesagt worden, gilt auch vom Cylinder insbesondere.

§. 173. Die krumme Oberfläche des senkrechten Cylinders ist einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie = der Peripherie der Grundfläche und dessen Höhe = der Höhe des Cylinders ist.

§. 174. Zwey Körper von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind einander gleich, wenn ihre den Grundflächen parallelen Durchschnitte, in gleicher Höhe über den Grandflächen genommen, jederzeit einander gleich sind.

Bew. Jeder zwischen zweyen parallelen Durchschnitten ent-

haltene Körper läßt sich desto richtiger als ein Prisma ansehen, je kleiner der Abstand beyder Schnitte von einander ist. Es hindert uns nichts, diesen Abstand so klein zu denken, als wir wollen. Wir können daher beyde Körper durch parallele Schnitte in unendlich viele Prismen theilen, so daß immer das Prisma des einen Körpers mit dem entsprechenden im andern gleiche Grundfläche und Höhe hat, also mit demselben gleich groß ist (166). Die Summe aller Prismen des einen Körpers ist also der Summe aller Prismen des andern, folglich sind die beyden Körper selbst einander gleich.

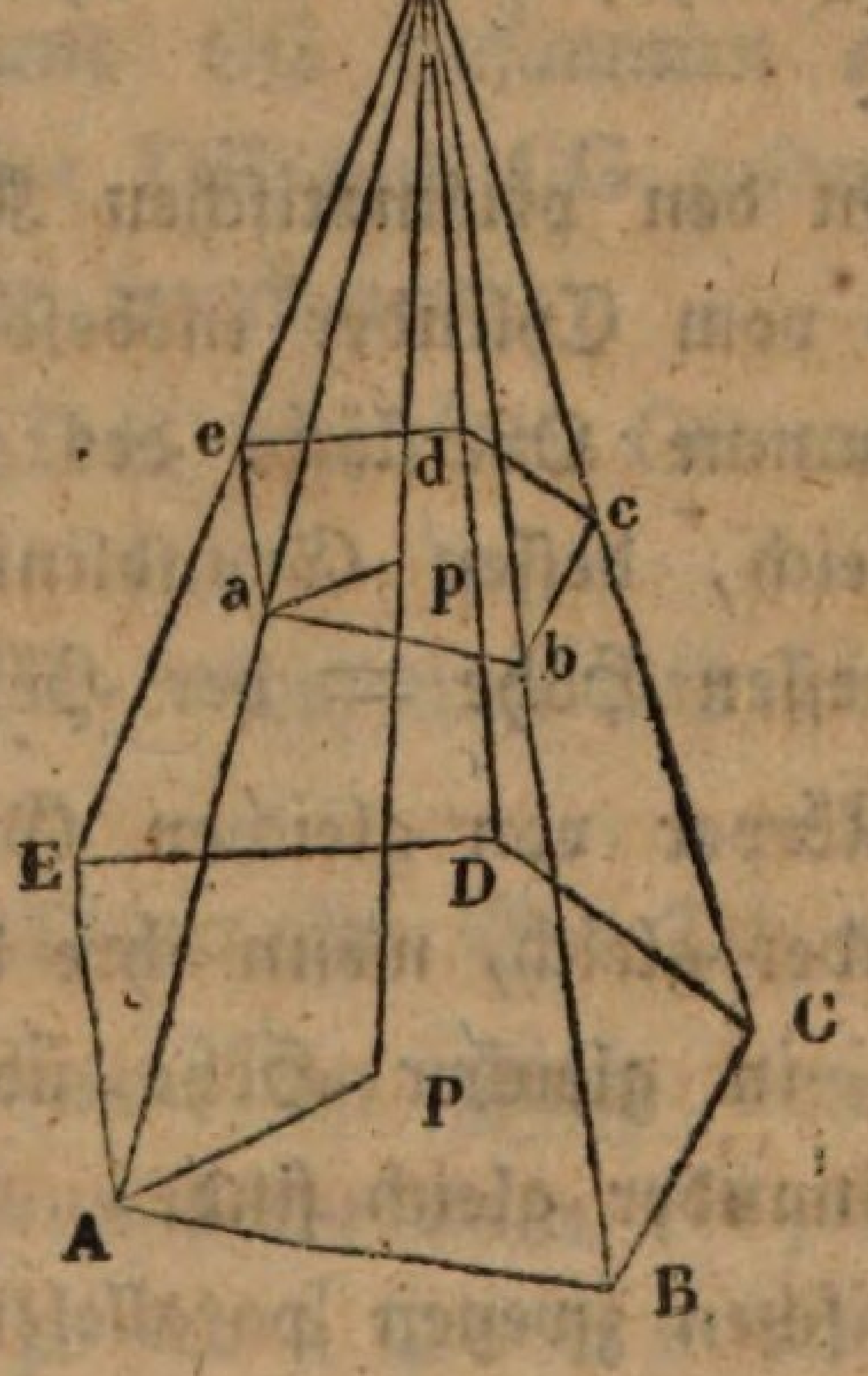
Anmerkung. 1. Von diesem Satze wird vorzüglich in der höheren Geometrie Gebrauch gemacht. Wir wenden ihn schon in den beyden folgenden Abschnitten mit Vortheil an.

Anmerkung 2. Aus der Gleichheit der Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe (65) folgt ein ähnlicher Satz für die Gleichheit von ebenen Figuren: Zwey Figuren sind einander gleich, wenn ihre parallelen Durchschnittslinien, in gleicher Höhe über den Grundlinien genommen, immer einander gleich sind.

Von den Pyramiden.

§. 175. Pyramide ist ein Körper, welcher von einer geradlinichten Grundfläche, und von eben so vielen in eine Spitze zusammen laufenden dreyeckten Seitenflächen, als die Grundfläche Seiten hat, begränzt wird.

§. 176. Wird eine Pyramide parallel mit der Grundfläche durchschnitten, so ist die Durchschnittsfläche der Grundfläche ähnlich.



Bew. ABCDEK sey eine Pyramide, abcde ein mit der Grundfläche ABCDE paralleler Schnitt, so sind in beyden Figuren die gleichnamigen Seiten einander parallel (147) also die gleichnamigen Winkel einander gleich (144). Es ist ferner

$$KA : Ka = AE : ae$$

und

$$KA : Ka = AB : ab \quad (91)$$

also

$$AE : ae = AB : ab \ (I. 104)$$

So läßt es sich von allen Seiten der einen Figur beweisen, daß sie mit den gleichnamigen der andern proportionirt sind. Hiermit ist die Aehnlichkeit beyder Figuren bewiesen (§. 87).

§. 177. Zwey parallele Durchschnittsflächen einer Pyramide verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

Bew. Es sey (in obiger Figur) KP senkrecht auf ABCDE, so geht diese Linie auch senkrecht durch abcde (145) in p. Man ziehe AP und ap, so sind beyde einander parallel (147).

Es ist also

$$KA : Ka = KP : Kp \ (89)$$

und

$$KA : Ka = AB : ab \ (91)$$

also

$$KP : Kp = AB : ab \ (I. 104)$$

folglich auch

$$KP^2 : Kp^2 = AB^2 : ab^2 \ (I. 98)$$

Nun ist auch

$$ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2 \ (94);$$

folglich

$$ABCDE : abcde = KP^2 : Kp^2 \ (I. 104).$$

Statt der Grundfläche ABCDE hätte jeder andere parallele Durchschnitt genommen werden können.

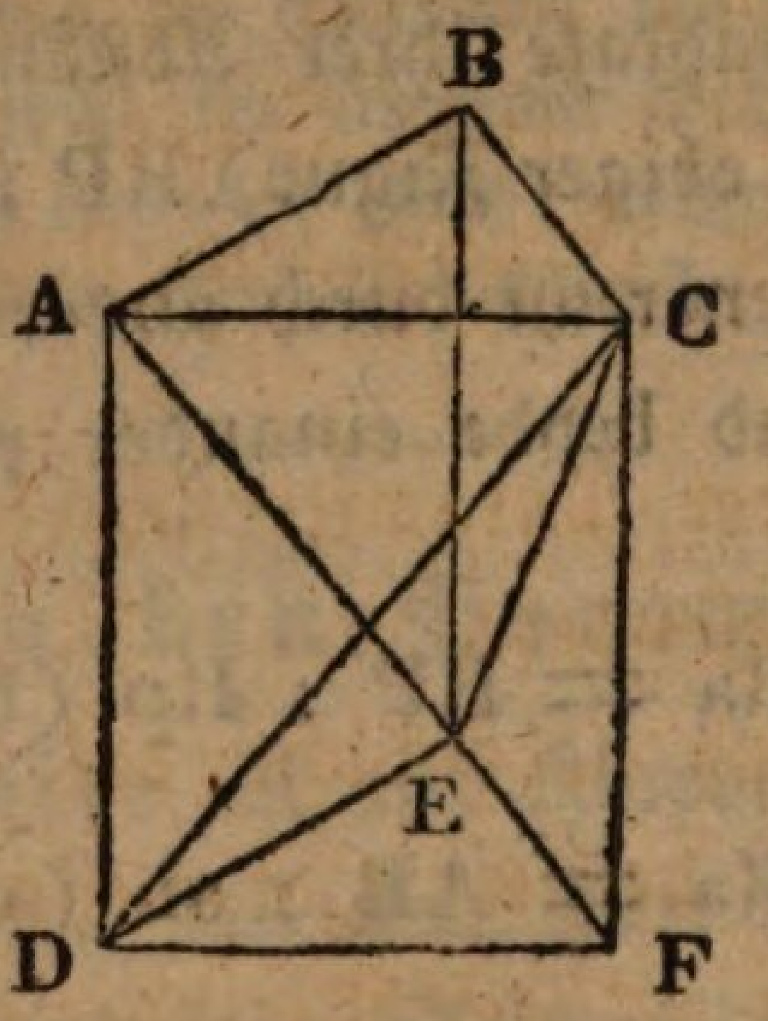
§. 178. Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind einander gleich.

Bew. Man nehme in zweyen solchen Pyramiden in gleichen Abständen von der Spitze eine mit der Grundfläche parallele Durchschnittsfläche, so haben in beyden Pyramiden die Grundflächen und die ihr parallelen Durchschnittsflächen mit den Quadraten ihrer Abstände von der Spitze einerley Verhältniß (§. 177),

folglich auch einerley Verhältniß unter einander (I. §. 104), da diese Abstände von der Spitze in beyden Pyramiden einander gleich sind. Da nun in beyden Pyramiden die Grundflächen einander gleich sind, so sind es auch jene Durchschnittsflächen (I §. 91). Ein gleicher Abstand von der Spitze gibt aber für gleich hohe Pyramiden auch gleiche Höhe über der Grundfläche.

Es haben also beyde Körper, von gleicher Höhe und Grundfläche, auch überall, in derselben Höhe über der Grundfläche, gleiche Durchschnittsflächen. Sie sind folglich einander gleich (174).

§. 179. Jedes dreyseitige Prisma läßt sich in drey gleiche dreyseitige Pyramiden zerlegen.



Bew. Die drey Pyramiden, worein sich das dreyseitige Prisma ABCDEF zerlegen läßt, sind: ABCE, DEFC und ACDE. Die beyden Pyramiden ABCE und DEFC haben mit dem Prisma einerley Grundfläche und einerley Höhe, also auch unter einander gleiche Grundfläche und Höhe, sind folglich unter einander gleich (178).

Betrachtet man DCF und DCA als die Grundflächen der beyden Pyramiden DEFC und ACDE, so haben beyde Pyramiden dieselbe Spitze in E, haben also, da Dreyeck DCF = DCA (55), gleiche Grundfläche und Höhe, sind folglich ebenfalls einander gleich.

Also sind die drey Pyramiden einander gleich.

§. 180. Die dreyseitige Pyramide ist also dem dritten Theil eines Prisma gleich, das mit ihm einerley Grundfläche und Höhe hat.

§. 181. Da jedes mehrseitige Prisma, und jede mehrseitige

Pyramide den dreyseitigen gleich sind, welche mit ihnen gleiche Grundfläche und Höhe haben, so gilt überhaupt der Satz, daß jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe ist.

§. 182. Eine jede Pyramide auszumessen, multiplicire man also die Grundfläche mit der Höhe, und dividire das Product durch 3.

§. 183. Wird die Grundfläche der Pyramide ein Kreis, so werden die dreyeckten Seitenflächen unendlich schmal und bilden zusammen eine krumme Seitenfläche. Ein solcher pyramidalischer Körper heißt ein Kegel. — Eine gerade Linie aus der Spitze des Kegels nach dem Mittelpunkt der Grundfläche heißt des Kegels Axe; und eine gerade Linie aus der Spitze nach einem Punkt des Umfangs der Grundfläche eine Seite des Kegels. — Je nachdem die Axe auf der Grundfläche steht, heißt der Kegel senkrecht oder schief.

§. 184. Was von der Pyramide überhaupt gesagt worden, gilt auch vom Kegel insbesondere.

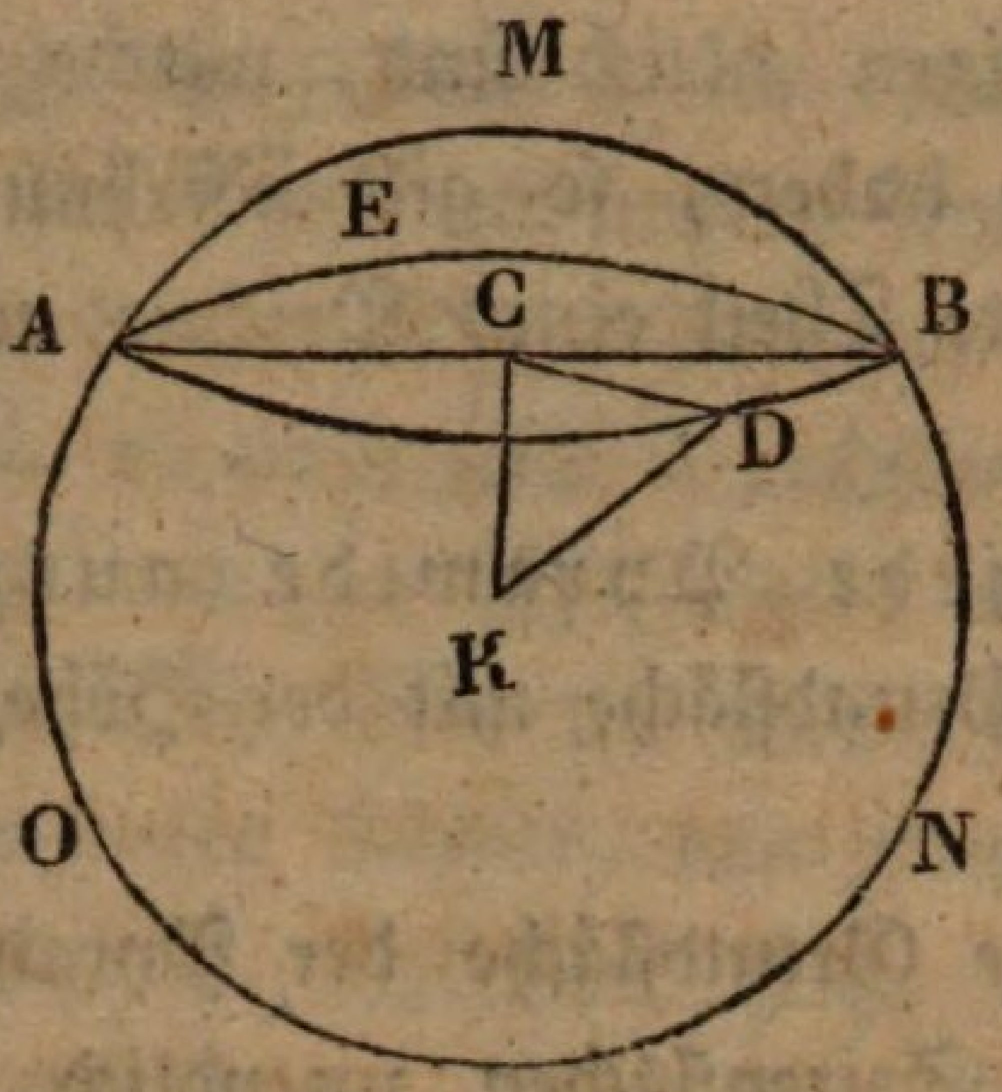
§. 185. Die krumme Oberfläche des senkrechten Kegels ist einem Kreissector gleich, dessen Halbmesser = der Seite des Kegels, und dessen Bogen = der Peripherie der Grundfläche.

Von der Kugel.

§. 186. Ein Körper, in welchem jeder Punkt der Oberfläche von einem gewissen innern Punkte gleich weit absteht, heißt eine Kugel. Die Wörter Mittelpunkt, Halbmesser, Durchmesser, Kugelsector und Kugelsegment haben eine ähnliche Bedeutung, wie beym Kreis. Ein Stück der Kugeloberfläche, das zwischen zweyen parallel durch die Kugel geführten Schnitten enthalten ist, heißt eine Kugelzone.

§. 187. Alle Halbmesser derselben Kugel sind einander gleich.

§. 188. Wenn man eine Kugel durch eine Ebene durchschneidet, so ist der Durchschnitt jedesmal ein Kreis.



Bew. MNO sey eine Kugel, K ihr Mittelpunkt, ADBEA ein beliebiger Schnitt durch dieselbe. Man fälle aus K auf den Schnitt das Perpendikel KC, nehme auf dem Umfang ADBEA einen beliebigen Punkt D an, und ziehe den Halbmesser KD, und die Linie CD; so ist CKD ein rechtwinklichtes Dreyeck, also nach dem Pythagoräischen Lehrsatze (79)

$$CD^2 + CK^2 = KD^2$$

also auch (Ax.)

$$CD^2 = KD^2 - CK^2$$

und

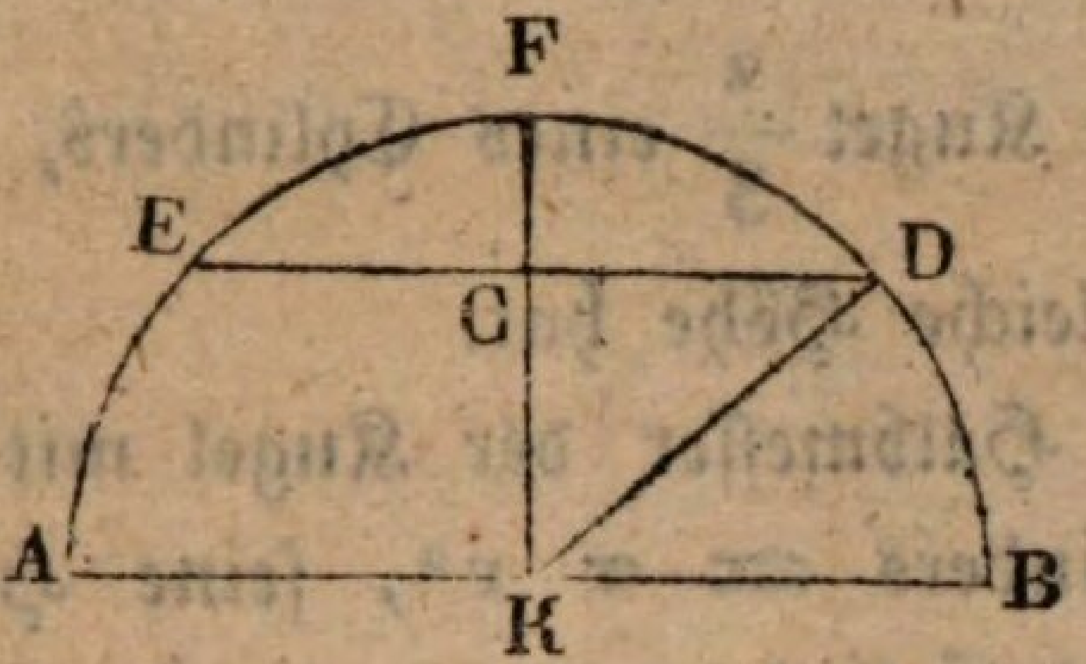
$$CD = \sqrt{(KD^2 - CK^2)}$$

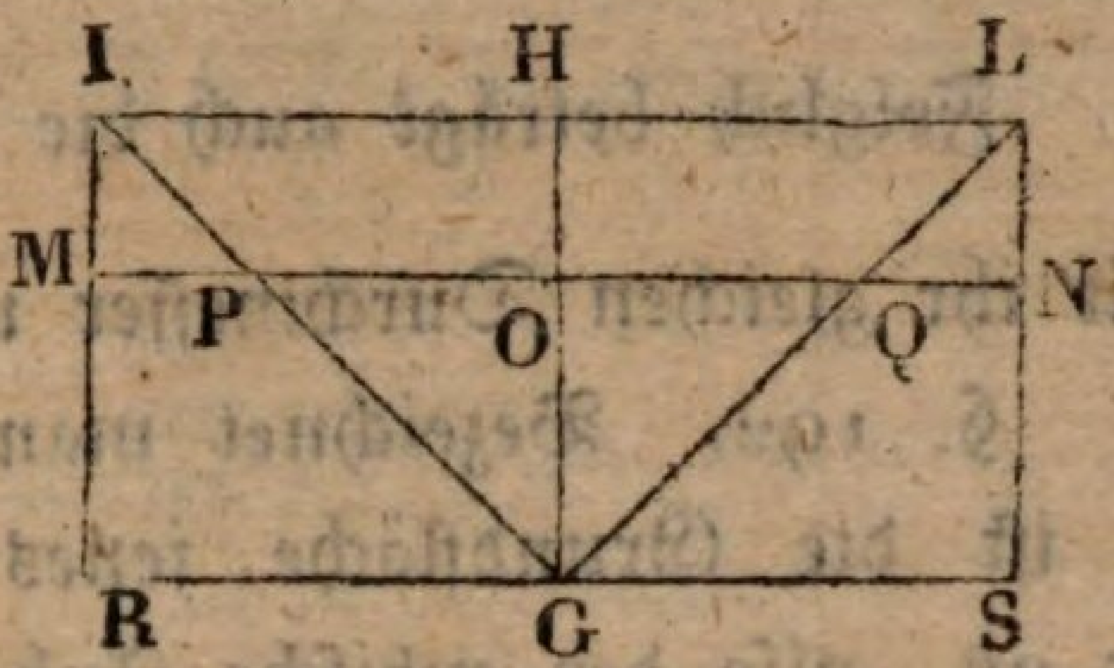
Wo man also auch den Punkt D in dem Umfange des Schnitts annehmen mag, so bekommt CD immer die nämliche Größe, da KD und CK immer die nämlichen bleiben. Es ist also C der Mittelpunkt und CD der Halbmesser eines Kreises, und der Schnitt selbst ein Kreis.

§. 189. Je kleiner CK angenommen wird, desto größer wird CD, d. h. der Schnitt durch die Kugel wird ein desto größerer Kreis, je näher er beym Mittelpunkte vorbey geht.

§. 190. Der Schnitt wird am größten, wenn er durch den Mittelpunkt selbst geführt wird. Er hat dann mit der Kugel gleichen Halbmesser. Alle Schnitte durch den Mittelpunkt der Kugel sind einander gleich, und heißen größte Kreise der Kugel.

§. 191. Die Kugel ist $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, der mit der Kugel gleichen Durchmesser und eine dem Durchmesser gleiche Höhe hat.





Bew. Es sey AFB der Durchschnitt einer Halbkugel, ILSR der Durchschnitt eines Cylinders, der mit der Halbkugel gleiche Grundfläche und Höhe hat. Man denke sich aus dem Cylinder einen Kegel ausgeschnitten, der mit dem Cylinder gleiche Grundfläche und Höhe hat, also dem dritten Theil des Cylinders gleich ist (184 und 181); so bleibt ein Körper übrig, dessen Durchschnitt RIGLS, und der noch $\frac{2}{3}$ des Cylinders beträgt. Wir können nun zeigen, daß die Halbkugel diesem Körper gleich sey, indem wir beweisen, daß alle Schnitte, welche durch die Halbkugel und durch den Körper in gleicher Höhe geführt werden, einander gleich sind (174).

Der Durchschnitt durch die Halbkugel ist ein Kreis (§. 188) und durch den ausgeschnittenen Cylinder eine ringförmige Fläche. Es seyen die Höhen CK und OG, in welchen beyde Durchschnittsflächen über den Grundflächen genommen werden, einander gleich, eine jede sey $= h$; der Halbmesser der Kugel und des Cylinders sey $= r$. Es sey ferner die Spitze G des Kegels im Mittelpunkte der Grundfläche des Cylinders, und GH die Axe.

Man erhält den Inhalt des Rings, wenn man den innern Kreis von dem äußern abzieht. Der äußere Kreis ist $= \pi\, r^2$ (135 III). Der Halbmesser des inneren Kreises ist $= h$. Denn, da IH $=$ HG, so ist auch PO $=$ OG (91) $= h$. Der innere Kreis ist also $= \pi\, h^2$, mithin

der Ring $= \pi\, r^2 - \pi\, h^2 = \pi\,(r^2 - h^2)$

Der Kreis ist $= \pi\,.\,CD^2$ (135 III) $= \pi\,(KD^2 - CK^2)$, also ebenfalls $= \pi\,(r^2 - h^2)$.

Folglich ist jedesmal der Kreis dem Ringe gleich.

Also ist die Halbkugel so groß als der Körper, der $\frac{2}{3}$ des Cylinders beträgt.

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Folglich beträgt auch die ganze Kugel $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, der mit ihr gleichen Durchmesser und gleiche Höhe hat.

§. 192. Bezeichnet man den Halbmesser der Kugel mit r, so ist die Grundfläche jenes Cylinders $= \pi r^2$, seine Höhe $= 2r$, also der cubische Inhalt des Cylinders $= 2 \pi r^3$, folglich der cubische Inhalt der Kugel $= \frac{4}{3} \pi r^3$.

§. 193. Die ganze Kugel läßt sich als ein Inbegriff von unendlich vielen Pyramiden ansehen, deren Grundflächen zusammen die Oberfläche der Kugel ausmachen, und deren Spitzen sich im Mittelpunkt der Kugel vereinigen, deren Höhe also dem Halbmesser der Kugel gleich ist.

So wie man also den cubischen Inhalt der Kugel erhalten würde, wenn man die Kugeloberfläche mit dem dritten Theil des Kugelhalbmessers multiplicirte (182); so kann man umgekehrt aus dem cubischen Inhalte der Kugel deren Oberfläche finden, indem man diesen Inhalt durch den dritten Theil des Halbmessers dividirt. Dieß gibt allgemein die Oberfläche der Kugel

$$= \frac{4}{3} \pi r^3 : \frac{1}{3} r = 4 \pi r^2.$$

§. 194. Die Oberfläche der Kugel ist also 4mal so groß als der größte Kreis derselben (190).

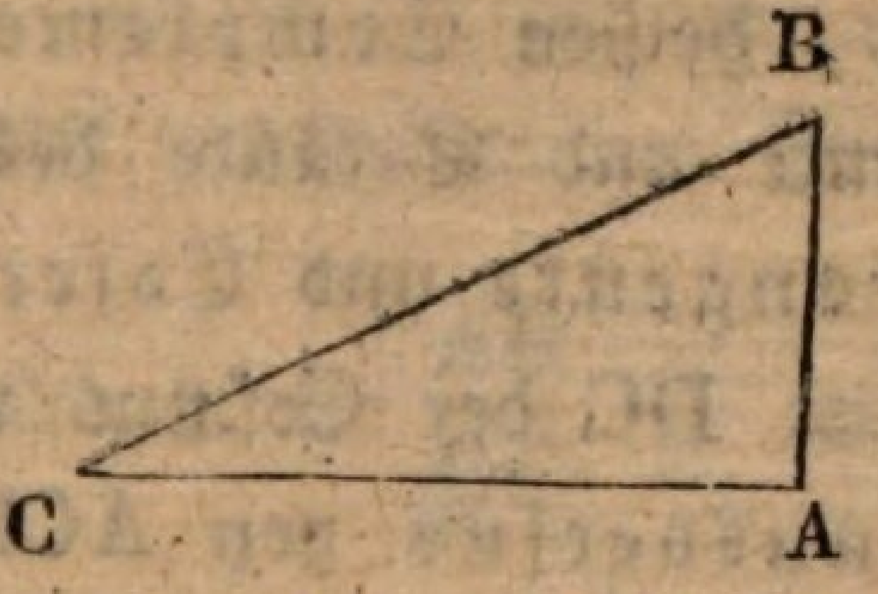
§. 195. Aus dem Ausdruck $\frac{4}{3} \pi r^3$ (192) folgt, daß sich die Kugeln wie die Cubiczahlen ihrer Halbmesser verhalten.

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MÜNCHEN

B. Trigonometrie.

Von Berechnung der Dreyecke.

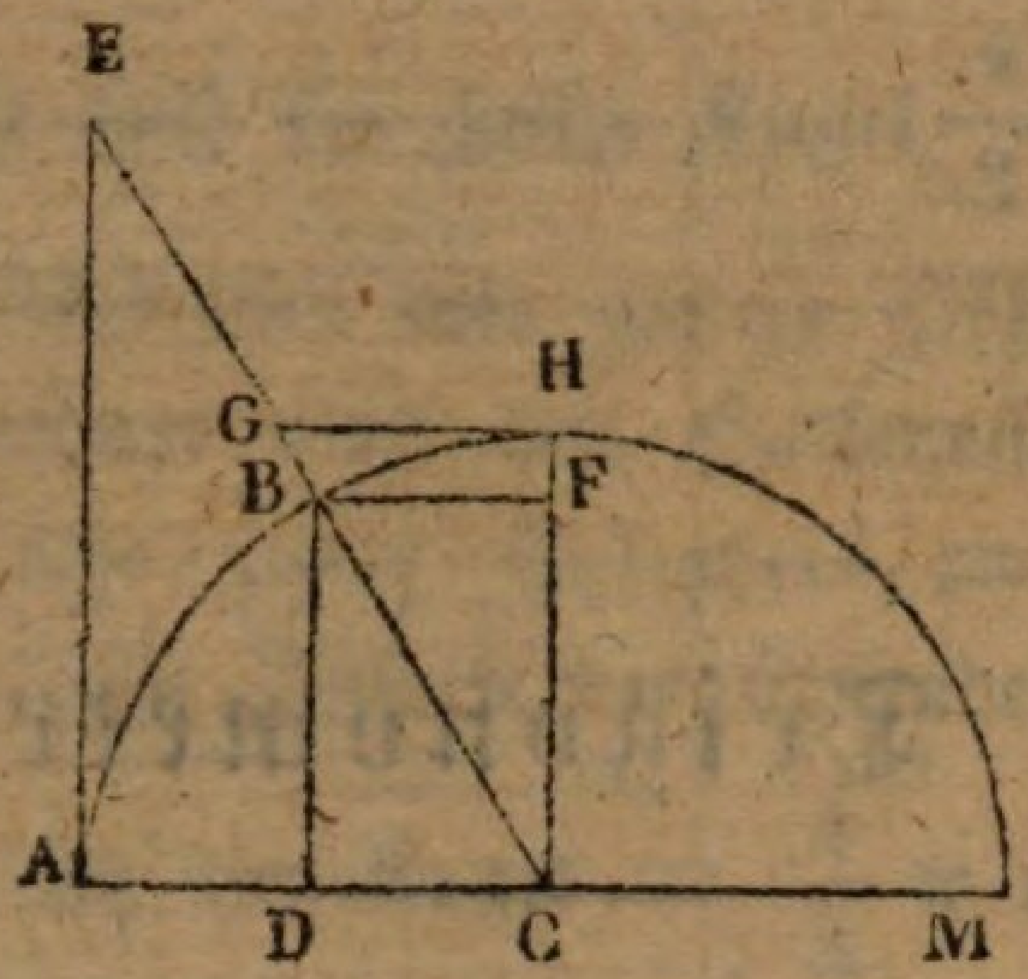
§. 196. Die Geometrie hat Wege gefunden, für jede Größe des Winkels C im rechtwinklichten Dreyeck BAC das Verhältniß der drey Seiten des Dreyecks so genau in Zahlen anzugeben, als es verlangt wird.



Gesetzt z. B., es sey $C = 30°$, so ist $B = 60°$, also AB die Hälfte von der Grundlinie eines gleichseitigen Dreyecks, in welchem CA die Höhe und BC die Seite ist. Folglich ist BA $= \frac{1}{2}$ BC, und, da $CA^2 = BC^2 - BA^2$ (§. 79) $= BC^2 - \frac{1}{4} BC^2 = \frac{3}{4} BC^2$ ist, $CA = \sqrt{\left(\frac{3}{4} BC^2\right)} = BC \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}$. Die drey Seiten eines jeden rechtwinklichten Dreyecks, dessen einer Winkel $= 30°$ ist, verhalten sich also jedesmal wie die Zahlen 1, $\frac{1}{2}$ und $\sqrt{\frac{3}{4}}$, oder 1; 0, 5 und 0,866025...

In andern Fällen wird das Verhältniß der drey Seiten des rechtwinklichten Dreyecks zwar nicht eben so leicht, aber doch eben so sicher gefunden. (Vgl. unten §. 215 Anm.)

§. 197. Um diese Verhältnißzahlen bequem auf die Berechnung der Dreyecke anzuwenden, hat man sich die s. g. **trigonometrischen Linien** erdacht.



Es sey AHM ein Halbkreis, ACB ein beliebiger spitzer Winkel und es seyen die Linien BD, EA u. s. w. senkrecht gezogen; so heißt BD der Sinus, AE die Tangente und CE die Secante des Winkels ACB. Eben so ist BF der Sinus, HG die Tangente und CG die Secante des Winkels BCH.

Die beyden Winkel ACB und BCH, welche einander zu einem Rechten ergänzen, heißen Complementwinkel von einander. Sinus, Tangente und Secante des Complementwinkels heißen Cosinus, Cotangente und Cosecante des gegebenen Winkels. So ist BF = DC der Cosinus von ACB, u. s. w.

AD heißt der Sinusversus von ACB.

§. 198. Der Halbmesser AC mag so groß seyn, als er will, so haben für denselben Winkel alle trigonometrischen Linien ein bestimmtes Verhältniß unter einander und zum Halbmesser. Man setzt gewöhnlich den Halbmesser = 1, und drückt die trigonometrischen Linien durch Verhältnißzahlen zu 1 aus. So ist z. B., wenn $BCH = 30^\circ$ ist, $BF = \frac{1}{2} BC$ (§. 196) also

$$\text{Sin } 30^\circ = \text{Cos } 60^\circ = 0{,}5$$

und $CF = 0{,}866025 \,.\, BC$, also

$$\text{Cos } 30^\circ = \text{Sin } 60^\circ = 0{,}866025 \ldots.$$

§. 199. Die schon berechneten trigonometrischen Tafeln enthalten die trigonometrischen Linien aller spitzen Winkel von Minute zu Minute, oder auch bloß deren Logarithmen, da die meisten trigonometrischen Rechnungen am kürzesten mit Logarithmen gemacht werden. Mit Hülfe dieser Tafeln lassen sich aus jeden zwey gegebenen Stücken eines rechtwinklichten Dreyecks (vgl. §. 37 Anm.) die übrigen durch ein einfaches Proportions-Exempel finden.

Ex. 1. Aus BC und W. C die AB zu finden (Fig. zu §. 196.)
Es ist

$$BC : AB = 1 : \text{Sin } C$$

also

$$AB = BC \,.\, \text{Sin } C \text{ (I §. 88)}$$

oder

$$\log AB = \log BC + \log \text{Sin } C \text{ (I §. 114)}$$

Ex. 2. Aus AC und AB den Winkel C zu finden.
Es ist

$$AC : AB = 1 : \text{Tg}C$$

also

$$\text{Tg}C = \frac{AB}{AC} \text{ (I §. 88)}$$

oder

$$\log \text{Tg } C = \log AB - \log AC \text{ (I §. 115)}$$

Ex. 3. Aus BC und AB den Winkel B zu finden.
Es ist

$$BC : AB = 1 : \text{Cos } B$$

also

$$\text{Cos } B = \frac{AB}{BC}$$

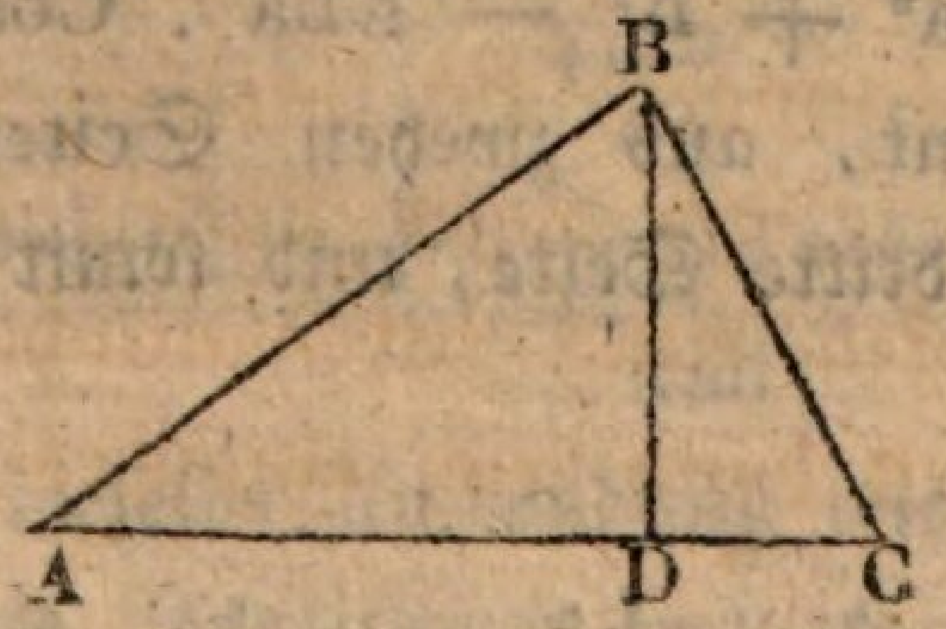
oder

$$\log \text{Cos } B = \log AB - \log BC.$$

Anmerkung. Aus zweyen Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks die dritte zu finden, dient schon der Pythagoräische Lehrsatz (§. 79 Anm. 2.). Es bedarf hierzu keiner trigonometrischen Tafeln.

§. 200. Es lassen sich ferner mit Hülfe der trigonometrischen Tafeln aus jeden drey gegebenen Stücken eines schiefwinklichten Dreyecks, worunter sich höchstens zwey Winkel befinden (vgl. §. 37 Anm.) die übrigen durch Rechnung finden. Die Auflösung der hauptsächlichsten hierher gehörigen Fälle ist in nachfolgenden Formeln enthalten.

§. 201. Es verhalten sich in jedem Dreyeck die Seiten wie die Sinussen der gegen über liegenden Winkel.



Bew. Es sey BD senkrecht auf AC, so ist

$$AB : BD = 1 : \text{Sin } A$$

und

$$BD : BC = \text{Sin } C : 1$$

also (I §. 96)

$$AB : BC = \text{Sin } C : \text{Sin } A$$

§. 202. Es ist bequem, die drey, den Winkeln A, B und C gegen über liegenden, Seiten mit a, b und c zu bezeichnen. So gibt obiger Satz die Formel:

$$\text{I} . \ c : a = \text{Sin } C : \text{Sin } A.$$

Diese Formel dient

1) aus zweyen Seiten eines Dreyecks und einem anliegenden Winkel den andern anliegenden Winkel (folglich auch den dritten Winkel u. s. w.) zu berechnen.

2) aus einer Seite und zweyen Winkeln (vgl. §. 40) das Dreyeck zu berechnen.

§. 203. Es ist

$$\text{II} . \ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab . \text{Cos } C$$

Bew. Es ist

$$\begin{aligned} AB^2 &= BD^2 + AD^2 \ (\S.\ 79) \\ &= BD^2 + (AC - CD)^2 \\ &= BD^2 + AC^2 - 2 . AC . CD + CD^2 \\ &= BD^2 + CD^2 + AC^2 - 2 . AC . CD \\ &= BC^2 + AC^2 - 2 . AC . CD \end{aligned}$$

Es verhält sich aber

$$BC : CD = 1 : \text{Cos } C$$

also ist

$$CD = BC . \text{Cos } C$$

daher

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 . AC . BC . \text{Cos } C$$

oder

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba . \text{Cos } C$$

Diese Formel dient, aus zweyen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite, und somit das ganze Dreyeck zu berechnen.

§. 204. Aus

$$c = a^2 + b^2 - 2ab . \text{Cos } C$$

folgt

$$2ab \cdot \text{Cos}\, C = a^2 + b^2 - c^2$$

also

$$\text{III. Cos}\, C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Diese Formel dient, aus den drey Seiten des Dreyecks die Winkel zu berechnen.

§. 205. Es ist

$$BD^2 = BC^2 - CD^2 \text{ (§. 79)}$$

also, da sich Sin C, Cos C und der Halbmesser wie die Linien BD, BC und CD verhalten, auch

$$(\text{Sin}\, C)^2 = 1 - (\text{Cos}\, C)^2$$

wofür wir kürzer

$$\text{Sin}\, C^2 = 1 - \text{Cos}\, C^2$$

schreiben.

Substituirt man für Cos C den Werth aus §. 204, so erhält man

$$\text{Sin}\, C^2 = 1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}$$

Hier ist der Zähler

$$= [2ab + (a^2 + b^2 - c^2)] \times [2ab - (a^2 + b^2 - c^2)]$$

wie man sich durch wirkliche Multiplication dieses letzten Ausdrucks leicht überzeugen kann (vgl. I §. 48 b. Ex. 3).

Der erste Factor des Zählers $2ab + (a^2 + b^2 - c^2)$ ist

$$= a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = (a + b)^2 - c^2$$
$$= (a + b + c) \cdot (a + b - c)$$

Der zweyte Factor ist

$$= 2ab - a^2 - b^2 + c^2 = c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= c^2 - (a - b)^2 = [c + (a - b)] \times [c - (a - b)]$$
$$= (a + c - b) \cdot (b + c - a)$$

Daher

$$\text{Sin}\, C^2 = \frac{(a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a+c-b) \cdot (b+c-a)}{4a^2b^2}$$

folglich

$$\text{IV. Sin}\, C = \frac{\sqrt{[(a+b+c).(a+b-c).(a+c-b).(b+c-a)]}}{2ab}$$

Eine Formel, welche dieselbe Anwendung wie die Formel III hat, aber zur Rechnung mit Logarithmen bequemer ist.

§. 206. Bezeichnet man den Flächeninhalt eines Dreyecks mit F, so ist

$$\text{V.}\quad F = \frac{1}{2} ab \,.\, \text{Sin } C.$$

Bew. Es ist der Inhalt des Dreyecks $ABC = \frac{1}{2} . AC . BD$ (§. 77) und $BD = BC . \text{Sin } C$.

Diese Formel dient, aus zweyen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel den Inhalt des Dreyecks zu berechnen.

§. 207. Da

$$a : b = \text{Sin } A : \text{Sin } B \text{ (§. 201)}$$

also

$$b = \frac{a . \text{Sin } B}{\text{Sin } A} \text{ (I §. 88)}$$

so ist

$$F = \frac{1}{2} a . \frac{a . \text{Sin } B}{\text{Sin } A} . \text{Sin } C$$

oder

$$\text{VI.}\quad F = \frac{a^2 . \text{Sin } B . \text{Sin } C}{2 . \text{Sin } A}$$

um aus einer Seite und zweyen Winkeln den Inhalt eines Dreyecks zu berechnen.

§. 208. Substituirt man den Werth für Sin C aus §. 205 in Formel V, so erhält man

$$\text{VII.}\quad F = \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b+c).(a+b-c).(a+c-b).(b+c-a)]}$$

nach welcher Formel man den Inhalt eines Dreyecks aus seinen drey Seiten findet.

Wichtigste Formeln für das Verhalten der trigonometrischen Linien unter einander.

§. 209. In der Figur zu §. 197 ist

$$BD^2 + DC^2 = BC^2$$

oder

$$\text{I.}\quad \text{Sin}^2 + \text{Cos}^2 = 1$$

Daraus folgt

$$\text{II.}\quad \text{Sin} = \sqrt{(1 - \text{Cos}^2)}$$

und

$$\text{III.}\quad \mathrm{Cos} = \sqrt{(1 - \mathrm{Sin}^2)}$$

§. 210. Ferner verhält sich

$$AE : AC = BD : DC \ (\S.\ 91)$$

oder

$$\mathrm{Tg} : 1 = \mathrm{Sin} : \mathrm{Cos}$$

daher

$$\text{IV.}\quad \mathrm{Tg} = \frac{\mathrm{Sin}}{\mathrm{Cos}}$$

Eben so

$$GH : HC = BF : FC \ (\S.\ 91)$$

oder

$$\mathrm{Cot} : 1 = \mathrm{Cos} : \mathrm{Sin}$$

daher

$$\text{V.}\quad \mathrm{Cot} = \frac{\mathrm{Cos}}{\mathrm{Sin}}$$

§. 211. Aus der Aehnlichkeit der beyden Dreyecke ACE und HGC (§. 85) erhält man

$$AE : AC = HC : HG$$

oder

$$\mathrm{Tg} : 1 = 1 : \mathrm{Cot}$$

woraus

$$\text{VI.}\quad \mathrm{Tg} = \frac{1}{\mathrm{Cot}}$$

und

$$\text{VII.}\quad \mathrm{Cot} = \frac{1}{\mathrm{Tg}}$$

§. 212. Ferner ist

$$CE : CA = CB : CD$$

oder

$$\mathrm{Sec} : 1 = 1 : \mathrm{Cos}$$

daher

$$\text{VIII.}\quad \mathrm{Sec} = \frac{1}{\mathrm{Cos}}$$

Eben so

$$CG : CH = CB : CF$$

oder

$$\mathrm{Cosec} : 1 = 1 : \mathrm{Sin}$$

daher

$$\text{IX.}\quad \mathrm{Cosec} = \frac{1}{\mathrm{Sin}}$$

§. 213. Ferner ist

$$AD = AC - DC$$

oder

$$\text{X.} \quad \text{Sinv} = 1 - \text{Cos}$$

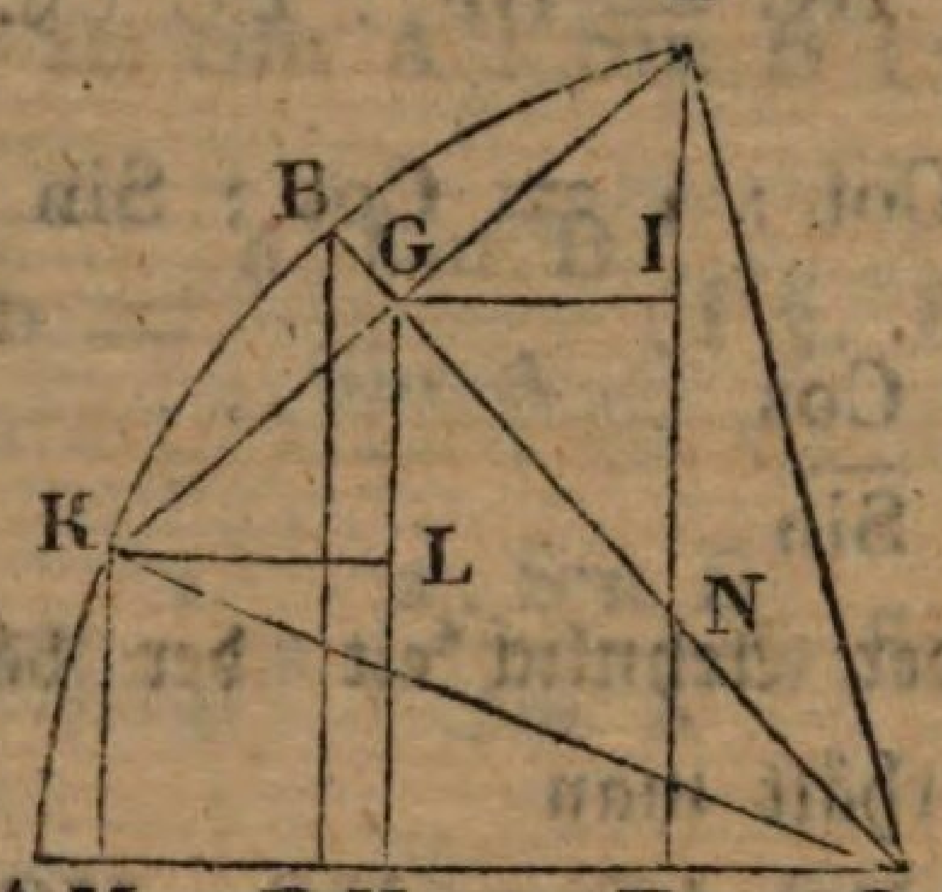
§. 214. Es ist

$$\text{XI.} \quad \text{Sin}\,(\alpha + \beta) = \text{Sin}\,\alpha \,.\, \text{Cos}\,\beta + \text{Cos}\,\alpha \,.\, \text{Sin}\,\beta$$

$$\text{XII.} \quad \text{Sin}\,(\alpha - \beta) = \text{Sin}\,\alpha \,.\, \text{Cos}\,\beta - \text{Cos}\,\alpha \,.\, \text{Sin}\,\beta$$

$$\text{XIII.} \quad \text{Cos}\,(\alpha + \beta) = \text{Cos}\,\alpha \,.\, \text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,\alpha \,.\, \text{Sin}\,\beta$$

$$\text{XIV.} \quad \text{Cos}\,(\alpha - \beta) = \text{Cos}\,\alpha \,.\, \text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\alpha \,.\, \text{Sin}\,\beta$$



Bew. 1. Es sey BCA $= \alpha$, DCB $= \beta$, so ist DCA $= \alpha + \beta$, BE $=$ Sin α, EC $=$ Cos α, DG $=$ Sin β, GC $=$ Cos β, DF $=$ Sin $(\alpha + \beta)$, FC $=$ Cos $(\alpha + \beta)$. Man ziehe GI senkrecht auf DF.

Es verhält sich

$$BC : BE = GC : GH$$

oder

$$1 : \text{Sin}\,\alpha = \text{Cos}\,\beta : IF$$

also

$$IF = \text{Sin}\,\alpha \,.\, \text{Cos}\,\beta$$

Es sind ferner die beyden rechtwinklichten Dreyecke GDI und BCE einander ähnlich, weil der Winkel GDN dem Winkel FCN gleich ist; daher verhält sich

$$DG : DI = BC : EC$$

oder

$$\text{Sin}\,\beta : DI = 1 : \text{Cos}\,\alpha$$

daher

$$DI = \text{Cos}\,\alpha \,.\, \text{Sin}\,\beta$$

Da nun

$$DF = IF + DI$$

so ist

$$\text{Sin}\,(\alpha + \beta) = \text{Sin}\,\alpha \,.\, \text{Cos}\,\beta + \text{Cos}\,\alpha \,.\, \text{Sin}\,\beta$$

2. Man nehme Winkel BCK = BCD = β, so wird KCA = $\alpha - \beta$, KM = Sin $(\alpha - \beta)$ und CM = Cos $(\alpha - \beta)$. Zieht man nun KL senkrecht auf GH, so wird Δ KLG $\cong$ GID, also GL = DI; folglich, da HL = HG — GL ist,

$$KM = IF - DI$$

oder

$$\text{Sin}\,(\alpha - \beta) = \text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Cos}\,\beta - \text{Cos}\,\alpha\,.\,\text{Sin}\,\beta$$

3. Es verhält sich

$$BC : GC = EC : HC$$

oder

$$1 : \text{Cos}\,\beta = \text{Cos}\,\alpha : HC$$

also

$$HC = \text{Cos}\,\alpha\,.\,\text{Cos}\,\beta$$

Ferner

$$DG : GI = BC : BE$$

oder

$$\text{Sin}\,\beta : HF = 1 : \text{Sin}\,\alpha$$

also

$$HF = \text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Sin}\,\beta$$

Nun ist

$$FC = HC - HF$$

folglich

$$\text{Cos}\,(\alpha + \beta) = \text{Cos}\,\alpha\,.\,\text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Sin}\,\beta$$

4. Da MH = KL = GI = HF ist, so ist

$$MC = HC + HF$$

oder

$$\text{Cos}\,(\alpha - \beta) = \text{Cos}\,\alpha\,.\,\text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Sin}\,\beta$$

§. 215. Setzt man $\alpha = \beta$, so wird aus XI

$$\text{XV.}\quad \text{Sin}\,2\alpha = 2\,.\,\text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Cos}\,\alpha$$

und aus XIII

$$\text{XVI.}\quad \text{Cos}\,2\alpha = \text{Cos}\,a^2 - \text{Sin}\,\alpha^2$$

Da sich ferner, aus §. 209, Cos $\alpha^2 = 1 - \text{Sin}\,\alpha^2$ ergibt, so ist

$$\text{Cos}\,2\alpha = 1 - \text{Sin}\,\alpha^2 - \text{Sin}\,\alpha^2$$

daher

$$\text{XVII.}\quad \text{Cos}\,2\alpha = 1 - 2\,\text{Sin}\,\alpha^2$$

Da, aus §. 209, ebenfalls Sin $\alpha^2 = 1 - \text{Cos}\,\alpha^2$ folgt, so ist ferner

$$\text{Cos}\,2\alpha = 1 - 2\,(1 - \text{Cos}\,\alpha^2) = 1 - 2 + 2\,\text{Cos}\,\alpha^2$$

daher

$$\text{XVIII.} \quad \text{Cos } 2\alpha = 2 \text{ Cos } \alpha^2 - 1$$

Aus XVII findet man wieder

$$\text{XIX.} \quad \text{Sin } \alpha = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos } 2\alpha}{2}}$$

und aus XVIII

$$\text{XX.} \quad \text{Cos } \alpha = \sqrt{\frac{1 + \text{Cos } 2\alpha}{2}}$$

Aus XVII folgt auch;

$$2 \text{ Sin } \alpha^2 = 1 - \text{Cos } 2\alpha$$

Es ist aber, §. 213 X,

$$\text{Sinv } 2\alpha = 1 - \text{Cos } 2\alpha$$

daher

$$\text{XXI.} \quad \text{Sinv } 2\alpha = 2 \text{ Sin } \alpha^2$$

Anmerkung. Die Formeln dieses §. reichen hin, um sich einen Begriff zu machen, wie die trigonometrischen Linien berechnet werden konnten. Wenn man den Cosinus irgend eines Winkels α kennt (z. B. Cos 30°, §. 198), so kann man daraus mittelst der xxten Formel den Cosinus von $\frac{1}{2}\alpha$, daraus wieder Cos $\frac{1}{4}\alpha$, daraus Cos $\frac{1}{8}\alpha$, Cos $\frac{1}{16}\alpha$ u. s. w. berechnen. Aus Cos α, Cos $\frac{1}{2}\alpha$, Cos $\frac{1}{4}\alpha$ u. s. w. lassen sich, mittelst der XIXten Formel, der Sin $\frac{1}{2}\alpha$, Sin $\frac{1}{4}\alpha$, Sin $\frac{1}{8}\alpha$, u. s. w. berechnen. Diese Rechnungen kann man so lange fortsetzen, bis der Winkel so klein ist, daß sich sein Sinus von seinem Bogen bis auf eine verlangte Zahl von Decimalstellen nicht mehr unterscheidet. Da sich für so kleine Winkel, bis auf eine hinreichende Zahl von Decimalstellen die Sinussen genau wie die Bögen verhalten, so gibt ein leichtes Proportions-Exempel, mit Rücksicht auf unsere Eintheilung des Kreisumfangs in Grade, Minuten und Secunden, z. B. den Sin 1′ oder den Sin 1″. Aus Sin 1′ findet man den Cos 1′ nach Formel III (§. 209), daraus den Sin 2′ nach Formel XV, daraus den Sin 3′ oder Sin (2′ + 1′) nach Formel XI (§. 214), u. s. w.

Von negativen Werthen trigonometrischer Linien.

§. 216. Rechnungen, bey welchen man nach allgemein hergeleiteten Regeln verfährt, führen häufig auf negative Resultate (vgl. I §. 39. u. f.). Wenn man bey der Anwendung der trigonometrischen Formeln auf negative trigonometrische Linien kommt, so frägt es sich, was diese negativen Werthe für eine Bedeutung haben.

Fig. 1.

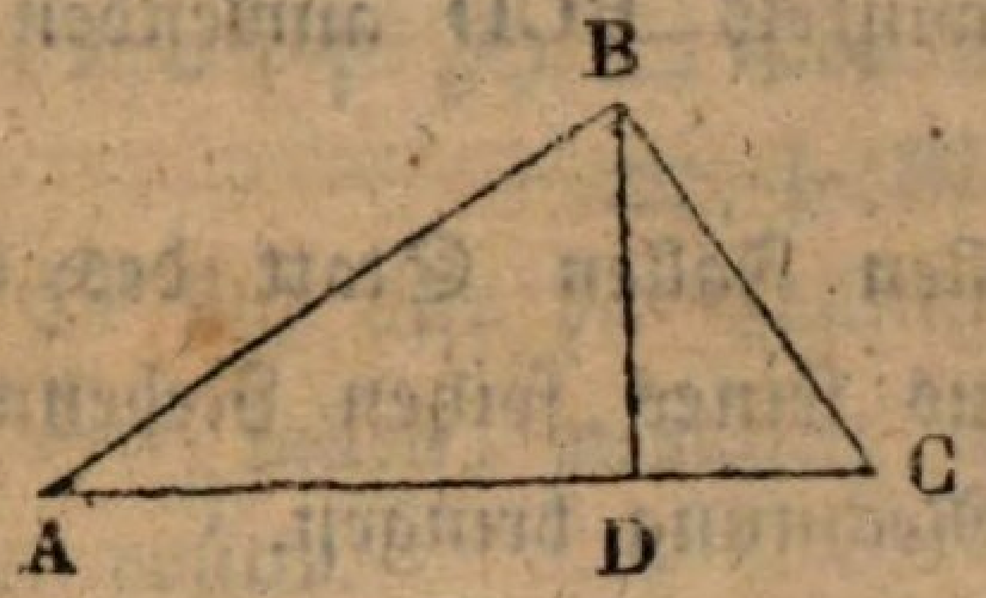
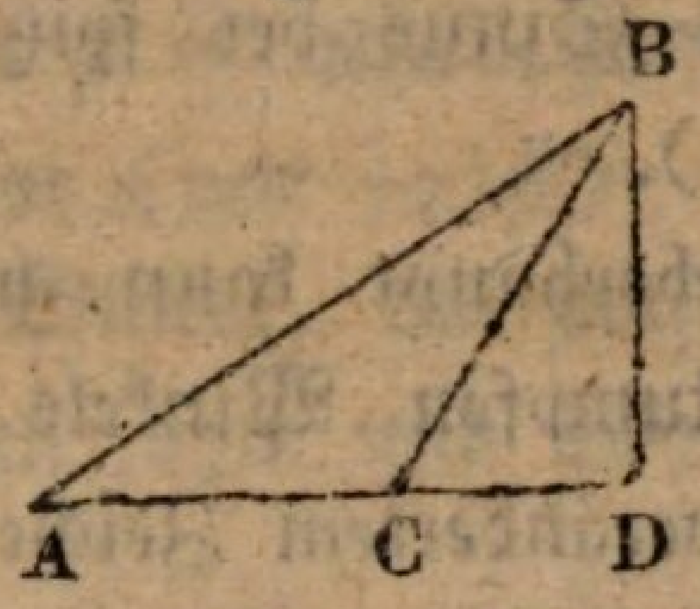


Fig. 2.



§. 217. Hätte man in der Herleitung der Formel II (§. 203) Statt dem dortigen Δ ABC, welches hier mit Fig. 1 einerley ist, das Δ ABC (Fig. 2) genommen; so hätte man

$$AB^2 = BD^2 + (AC + CD)^2$$
$$= BC^2 + AC^2 + 2 . AC . AD$$

gefunden; man hätte also, da AD = AB . Cos BCD ist,

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab . \text{Cos } BCD$$

erhalten, wo BCD der Nebenwinkel von C im Δ ABC ist.

Also, wenn der von den gegebenen Seiten CA und CB eingeschlossene Winkel ein stumpfer ist, so kann man zur Berechnung der dritten Seite AB Statt desselben seinen spitzen Nebenwinkel mit dem entgegen gesetzten Zeichen gebrauchen.

Man leitet daraus den Satz ab:

Der Cosinus des stumpfen Winkels ist gleich dem Cosinus seines spitzen Nebenwinkels, nur mit dem entgegen gesetzten Zeichen, also negativ, wenn der Cosinus, so wie jede andere trigonometrische Linie, am spitzen Winkel als positiv betrachtet wird.

§. 218. Will man dagegen den Winkel BCA aus den Seiten AB, BC und dem Winkel BAC, nach der Formel I (§. 202), berechnen, so kann der Winkel BCA entweder ein spitzer Winkel seyn, wie Fig. 1, oder der stumpfe Nebenwinkel dieses spitzen Winkels, wie Fig. 2.

Umgekehrt, wenn man aus dem stumpfen Winkel BCA (Fig. 2), und zweyen der übrigen drey erwähnten Stücke das dritte derselben berechnen wollte, so müßte man dazu den Sinus seines spitzen Nebenwinkels gebrauchen.

Eben so bekommt man den Inhalt eines Dreyecks ABC, das einen stumpfen Winkel an der Grundlinie hat, wenn man das Perpendikel BD (Fig. 2) mit der Grundlinie AC multiplicirt; und um das Perpendikel BD zu berechnen, kann man wie-

der den Sinus des spitzen Nebenwinkels BCD anwenden (vgl. §. 206).

Ueberhaupt kann man in allen Fällen Statt des Sinus eines stumpfen Winkels den Sinus seines spitzen Nebenwinkels mit unverändertem Zeichen in die Rechnung bringen.

Man sagt daher:

Der Sinus des stumpfen Winkels ist dem Sinus seines spitzen Nebenwinkels gleich, und, wie dieser, positiv.

§. 219. Damit stimmt auch die Anwendung der Formeln XI und XIII (§. 214) vollkommen überein, wenn man den stumpfen Winkel allgemein mit $90° + \beta$ bezeichnet. Dann ist nämlich

$$\text{Cos}\,(90° + \beta) = \text{Cos}\,90° \,.\, \text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,90° \,.\, \text{Sin}\,\beta$$
$$= -\,\text{Sin}\,\beta = -\,\text{Cos}\,(90° - \beta)$$

indem $\text{Cos}\,90° = 0$ und $\text{Sin}\,90° = 1$ ist. Der Winkel $90° - \beta$ ist der spitze Nebenwinkel von $90° + \beta$.

Ferner ist

$$\text{Sin}\,(90° + \beta) = \text{Sin}\,90° \,.\, \text{Cos}\,\beta + \text{Cos}\,90° \,.\, \text{Sin}\,\beta$$
$$= \text{Cos}\,\beta = \text{Sin}\,(90° - \beta).$$

§. 220. In Polygonen mit einspringenden Winkeln können Winkel vorkommen, die größer als 180°, oder auch größer als 270° oder 3 rechte Winkel sind.

Es ist

$$\text{Sin}\,(180° + \beta) = \text{Sin}\,180° \,.\, \text{Cos}\,\beta + \text{Cos}\,180° \,.\, \text{Sin}\,\beta$$
$$= -\,\text{Sin}\,\beta$$

indem $\text{Sin}\,180° = 0$ und $\text{Cos}\,180° = -1$ ist; und

$$\text{Sin}\,(270° + \beta) = \text{Sin}\,270° \,.\, \text{Cos}\,\beta + \text{Cos}\,270° \,.\, \text{Sin}\,\beta$$
$$= -\,\text{Cos}\,\beta = -\,\text{Sin}\,(90° - \beta)$$

indem $\text{Sin}\,270° = -1$ und $\text{Cos}\,270° = 0$ ist.

Es sind also die Sinussen aller Winkel, die größer als 180° und kleiner als 360° sind, negativ.

§. 221. Es ist ferner

$$\text{Cos}\,(180° + \beta) = \text{Cos}\,180° \,.\, \text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,180° \,.\, \text{Sin}\,\beta$$
$$= -\,\text{Cos}\,\beta$$

und

$$\text{Cos}\,(270^\circ + \beta) = \text{Cos}\,270^\circ\,.\,\text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,270^\circ\,.\,\text{Sin}\,\beta$$
$$= + \text{Sin}\,\beta = \text{Cos}\,(90^\circ - \beta)$$

Es sind also die Cosinussen aller Winkel, die zwischen 180 und 270° fallen, negativ; und zwischen 270 und 360° sind sie wieder positiv.

§. 222. Da $\text{Tg} = \frac{\text{Sin}}{\text{Cos}}$ (§. 210 IV); so sind die Tangenten aller spitzen Winkel positiv; aller Winkel zwischen 90 und 180° negativ, weil dann der Sinus positiv und der Cosinus negativ ist; aller Winkel zwischen 180 und 270° positiv, weil da sowohl der Sinus als der Cosinus negativ ist; aller Winkel zwischen 270 und 360° negativ, weil da der Sinus negativ, der Cosinus aber positiv ist (vgl. I §. 42 d.).

§. 223. Da $\text{Cot} = \frac{1}{\text{Tg}}$, so sind die Cotangenten in denselben Fällen positiv, oder negativ, in welchen es die Tangenten sind.

§. 224. Aus $\text{Sec} = \frac{1}{\text{Cos}}$ folgt: die Secanten sind positiv, und negativ, wie die Cosinussen.

§. 225. Aus $\text{Cosec} = \frac{1}{\text{Sin}}$ folgt: die Cosecanten sind positiv und negativ wie die Sinussen.

§. 226. Man kann in den Rechnungen auch auf einen **negativen Winkel** kommen, z. B. bey Anwendung der Formeln XII und XIV (§. 214), wenn $\beta > \alpha$ ist. Dann kann man einen solchen, er mag spitz oder stumpf seyn, mit $-\gamma$ bezeichnen, und man hat

$$\text{Sin}\,(-\gamma) = \text{Sin}\,(0 - \gamma)$$
$$= \text{Sin}\,0\,.\,\text{Cos}\,\gamma - \text{Cos}\,0\,.\,\text{Sin}\,\gamma$$
$$= - \text{Sin}\,\gamma = \text{Sin}\,(360^\circ - \gamma)$$

und
$$\text{Cos}\,(-\gamma) = \text{Cos}\,(0 - \gamma)$$
$$= \text{Cos}\,0\,.\,\text{Cos}\,\gamma + \text{Sin}\,0\,.\,\text{Sin}\,\gamma$$
$$= \text{Cos}\,\gamma = \text{Cos}\,(360^\circ - \gamma)$$

Von dem Unterschiede algebraischer und transscendentischer Gleichungen.

§. 227. Unter einer **algebraischen** Gleichung versteht man eine solche, aus welcher die unbekannte Größe allein durch die so genannten sechs gemeinen arithmetischen Operationen (nämlich Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Potenzerhebung und Wurzelausziehung) heraus gefunden werden kann. Wenn diese sechs Operationen zur Auflösung der Gleichung nicht hinreichen, so heißt sie eine **transscendentische**.

Es kann dieselbe Gleichung in einer Hinsicht eine algebraische und in anderer Hinsicht eine transscendentische seyn. So ist z. B.

$$a . \mathrm{Sin}\, x = b$$

eine algebraische Gleichung, so lange nur Sin x als unbekannte Größe gesucht wird. Die bloße Division gibt schon

$$\mathrm{Sin}\, x = \frac{b}{a}$$

Wird hingegen der Winkel x als unbekannte Größe angesehen, so ist die Gleichung eine transscendentische, weil hier der Winkel x durch keine jener sechs Operationen gefunden werden kann. Daß, wenn b und a bestimmte Zahlen sind, der Winkel x in den schon berechneten trigonometrischen Tafeln nachgeschlagen werden kann, thut hier nichts zur Sache.

§. 228. Eine Gleichung wie

$$c . \mathrm{Sin}\, x = d . \mathrm{Cos}\, x$$

hätte, als algebraische Gleichung betrachtet, zwey unbekannte Größen, nämlich Sin x und Cos x; als transscendentische Gleichung betrachtet, hat sie hingegen nur die **eine** unbekannte Größe x, so daß es keiner zweyten Gleichung bedarf, um einen bestimmten Werth für x zu erhalten (vgl. I §. 133). Es ist nämlich, nach der Algebra,

$$\frac{\mathrm{Sin}\, x}{\mathrm{Cox}\, x} = \frac{d}{c}$$

und, da $\frac{\mathrm{Sin}\, x}{\mathrm{Cos}\, x} = \mathrm{Tg}\, x$ ist (§. 210 . IV), nach der Trigonometrie,

$$\mathrm{Tg}\, x = \frac{d}{c}.$$

§. 229. Als Beyspiel einer Anwendung dieser Sätze, so wie obiger trigonometrischen Formeln, stehe hier eine Aufgabe, mit der mich in meinem früheren Wirkungskreise unter andern ein Kantonsschüler zu Aarau erfreut hat.

Aufg. Aus der Grundlinie und Höhe eines Dreyecks und seinem Winkel an der Spitze das Dreyeck zu finden.

Aufl. (Fig. zu §. 196). Es sey die Grundlinie $AC = b$, die Höhe $BD = h$, und Winkel $ACB = x$, so ist aus Δ BCD

$$BC : BD = 1 : \text{Sin } C$$

oder

$$BC : h = 1 : \text{Sin } x$$

also

$$BC = \frac{h}{\text{Sin } x}$$

und aus Δ ABC

$$BC : AC = \text{Sin } A : \text{Sin } B$$

oder, da $\text{Sin } A = \text{Sin } (180^\circ - A) = \text{Sin } (B + x)$ ist (§ 218)

$$BC : b = \text{Sin } (B + x) : \text{Sin } B$$

also

$$BC = \frac{b \text{ Sin } (B + x)}{\text{Sin } B}$$

Die beyden Werthe für BC einander gleichgesetzt, gibt

$$\frac{h}{\text{Sin } x} = \frac{b. \text{ Sin } (B + x)}{\text{Sin } B}$$

oder $h. \text{ Sin } B = b. \text{ Sin } x. \text{ Sin } (B + x)$

Diese Gleichung hat für die Algebra zwey unbekannte Größen, nähmlich Sin x und Sin (B + x), für die Trigonometrie dagegen nur eine, den Winkel x. Es lassen sich mit Hülfe unserer trigonometrischen Formeln die beyden unbekannten Größen Sin x und Sin (B + x) auf eine einzige unbekannte trigonometrische Linie zurückbringen. Wenden wir zuerst die Formel XI (§.214) an, so wird

$$h . \text{Sin } B = b . \text{Sin } x \; (\text{Sin } B . \text{Cos } x + \text{Cos } B . \text{Sin } x).$$

Man multiplicire jetzt h . Sin B mit $\text{Sin } x^2 + \text{Cos } x^2$, welches $= 1$ ist, vermöge § 209, so wird

$$h . \text{Sin } B . \text{Sin } x^2 + h . \text{Sin } B . \text{Cos } x^2$$
$$= b . \text{Sin} B . \text{Sin } x . \text{Cos } x + b . \text{Cos } B . \text{Sin } x^2$$

Man dividire auf beyden Seiten durch $\text{Sin } x^2$, so erhält man:

$$h . \text{Sin} B + h . \text{Sin } B . \frac{\text{Cos } x^2}{\text{Sin } x^2} = b . \text{Sin } B . \frac{\text{Cos } x}{\text{Sin } x} + b . \text{Cos } B$$

oder, da $\frac{\text{Cos } x}{\text{Sin } x} = \text{Cot } x$ (§. 210) ist,

$$h . \mathrm{Sin}\, B + h . \mathrm{Sin}\, B . \mathrm{Cot}\, x^2 = b\, \mathrm{Sin}\, B . \mathrm{Cot}\, x + b . \mathrm{Cos}\, B.$$

Dividirt man hier überall durch Sin B, so erhält man, da $\frac{\mathrm{Cos}\, B}{\mathrm{Sin}\, B} = \mathrm{Cot}\, B$ ist,

$$h + h . \mathrm{Cot}\, x^2 = b . \mathrm{Cot}\, x + b . \mathrm{Cot}\, B,$$

eine vermischte quadratische Gleichung, welche für die Algebra nur die einzige unbekannte Größe Cot x enthält, und also nach den Regeln der Algebra aufgelöst werden kann. Die Auflösung gibt

$$\mathrm{Cot}\, x = \frac{b \pm \sqrt{(4\, bh . \mathrm{Cot}\, B + b^2 - 4\, h^2)}}{2\, h}$$

Sphärische Trigonometrie.

§. 230. Wenn ein körperlicher Winkel von drey ebenen Winkeln gebildet wird, so ist dadurch zugleich die gegenseitige Lage von den drey Ebenen, in welchen die drey ebenen Winkel liegen, bestimmt.

Ueberhaupt haben die drey Neigungswinkel von je zweyen dieser Ebenen und die drey ebenen Winkel eine gegenseitige Abhängigkeit von einander, so daß sich, wie sich aus dem Folgenden näher ergeben wird, jedesmal aus dreyen dieser sechs Stücke die drey übrigen durch Rechnung finden lassen.

§. 231. Denkt man sich die Spitze des körperlichen Winkels als den Mittelpunkt einer mit willkührlichem Halbmesser beschriebenen Kugel, so erhält man eine Art von Kugelsector, dessen krumme Oberfläche man ein sphärisches Dreyeck genannt hat.

Die Bögen, welche das sphärische Dreyeck einschließen, gehören zu größten Kreisen der Kugel (§. 190), und sind das Maß der drey ebenen Winkel. Je zwey Tangenten an diesen Bögen in den drey Ecken des sphärischen Dreyecks stehen auf der Durchschnittslinie zweyer Ebenen senkrecht, und bestimmen folglich den Neigungswinkel jener Ebenen (§. 148).

Die drey Bögen heißen nun uneigentlich die Seiten, und die drey Winkel an den Ecken des sphärischen Dreyecks uneigentlich

die Winkel des sphärischen Dreyecks. Jene sind eigentlich nichts als die drey ebenen Winkel an der Spitze des körperlichen Winkels, und diese eigentlich nichts als die Neigungswinkel der den drey Winkeln zugehörigen Ebenen.

§. 232. Die sphärische Trigonometrie lehrt, aus dreyen jener Stücke die drey übrigen durch Rechnung finden.

Die sphärische Trigonometrie hat es also, abgesehen von ihrer Anwendung auf andere Theile der Mathematik, bloß mit Bestimmungen von Winkeln durch einander zu thun.

Die sogenannten Seiten des sphärischen Dreyecks müssen in Graden, Minuten u. s. w. ausgedrückt seyn, ehe sie in eine trigonometrische Rechnung eingehen können.

Ist jedoch bey einer bestimmten Kugel die Seite des sphärischen Dreyecks in Längenmaß gegeben, so läßt sich diese leicht aus dem bekannten Halbmesser der Kugel in Graden ausdrücken, so wie umgekehrt eine durch die Rechnung in Graden gefundene Seite sich in Fußen u. s. w. bestimmen läßt (vgl. §. 137. d).

§. 233. Da die Summe aller ebenen Winkel, welche einen körperlichen bilden, immer kleiner als 4 rechte ist, (§. 155) so betragen die drey Seiten des sphärischen Dreyecks zusammen immer weniger als 4 rechte Winkel. Ihre Summe kann jeden möglichen Werth zwischen 0° und 360° haben.

Eine jede Seite für sich hat ihren Werth zwischen 0° und 180°.

§. 234. Da einer der drey Neigungswinkel ein rechter Winkel seyn kann, so gibt es auch rechtwinklichte sphärische Dreyecke.

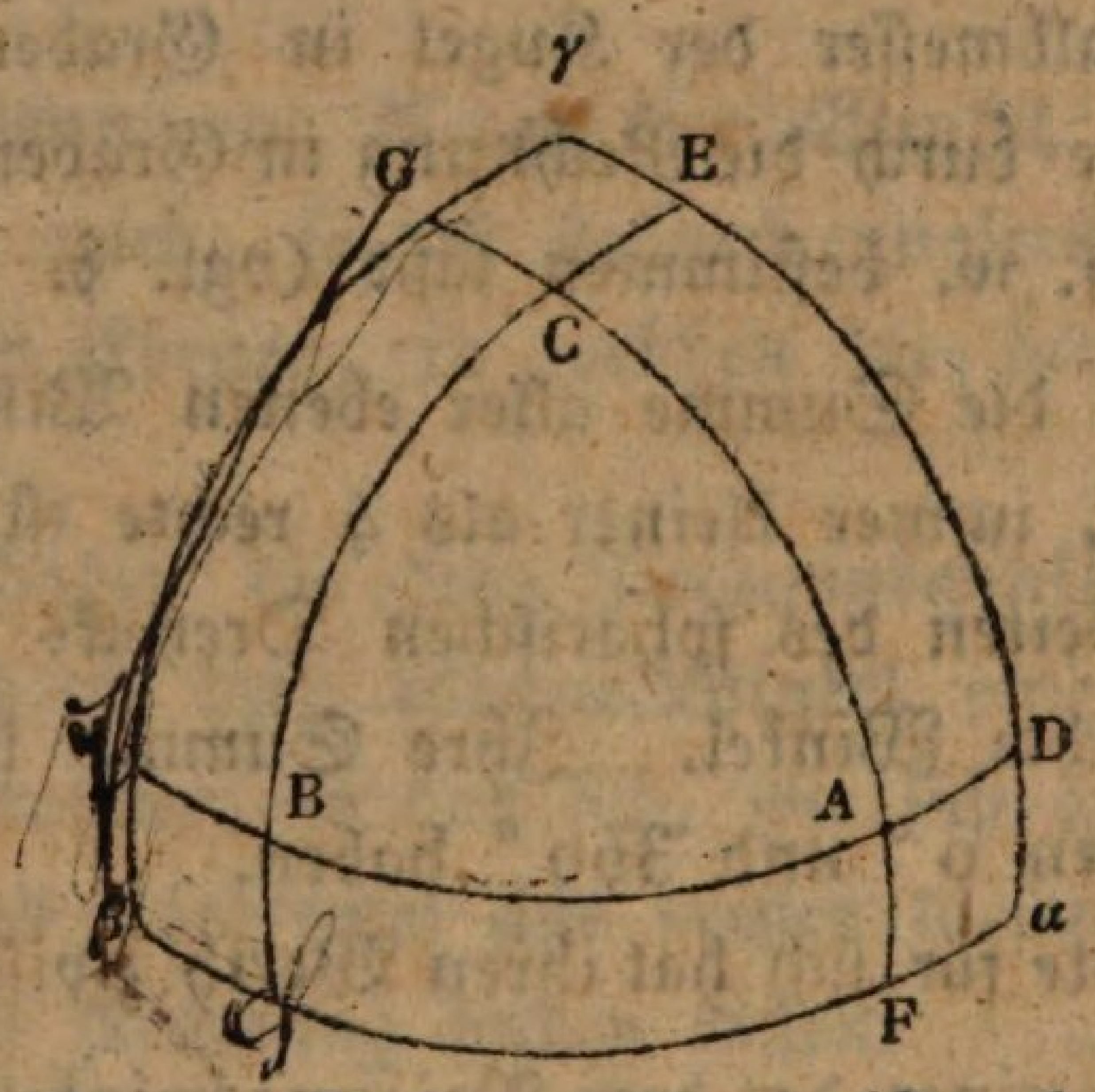
§. 235. Da ferner zwey von den Neigungswinkeln rechte Winkel seyn können, so gibt es auch sphärische Dreyecke mit zwey rechten Winkeln. In diesem Falle stehen zwey Ebenen auf der dritten Ebene senkrecht. Folglich steht auch ihre Durchschnittslinie auf der dritten Ebene senkrecht (§. 152). Diese Durchschnittslinie bildet also mit allen Linien in der dritten Ebene, die von dem Mittelpunkt der Kugel aus gezogen werden können, rechte Winkel (§. 143). Die eine Ecke des sphärischen Dreyecks ist also von jedem Punkte des Bogens, der zur dritten Ebene gehört, um einen Quadranten entfernt.

Jene Ecke heißt in diesem Falle der Pol dieses Bogens und des ganzen größten Kreises, von welchem der Bogen ein Theil ist.

§. 236. Ein sphärisches Dreyeck mit zwey rechten Winkeln hat also auch jedesmal zwey Quadranten zu Seiten; und umgekehrt: wenn ein sphärisches Dreyeck zwey Quadranten zu Seiten hat, so hat es auch zwey rechte Winkel, und der Durchschnittspunkt der beyden Quadranten ist der Pol der dritten Seite. Die dritte Seite ist das Maß des Winkels am gegenüberstehenden Pole.

§. 237. Endlich gibt es auch sphärische Dreyecke mit drey rechten Winkeln. Ein solches ist ebenfalls von drey Quadranten begränzt, und beträgt den achten Theil der ganzen Kugeloberfläche.

§. 238. A, B, C seyen Pole der größten Kreise $\beta\ \gamma$, $\alpha\ \gamma$, $\alpha\ \beta$; so durchschneiden diese drey Kreise einander in Punkten α, β, γ, welche selbst wieder Pole der Seiten BC, AC, AB sind.



Bew. Da B der Pol von $\alpha\gamma$ ist, so ist α um einen Quadranten von B entfernt; und, da C der Pol von $\alpha\beta$ ist, so ist α auch um einen Quadranten von C entfernt. Denkt man sich nun größte Kreise durch α und B, so wie durch α und C gezogen, so ist αBC ein sphärisches Dreyeck, das zwey Quadranten zu Seiten, also auch zwey rechte Winkel hat (§. 236), folglich α der Pol von BC.

Eben so läßt sich beweisen, daß β der Pol von AC, und γ der Pol von AB ist.

§. 239. Es ist $\alpha\gamma + DE = \alpha E + D\gamma = 180°$ (§. 238). Da nun DE das Maß des Winkels B ist (§. 236), so folgt hieraus der Satz:

Die Seiten des sphärischen Dreyecks $\alpha\beta\gamma$ ergänzen die gegenüberstehenden Winkel des gegebenen sphärischen Dreyecks ABC zu 180°.

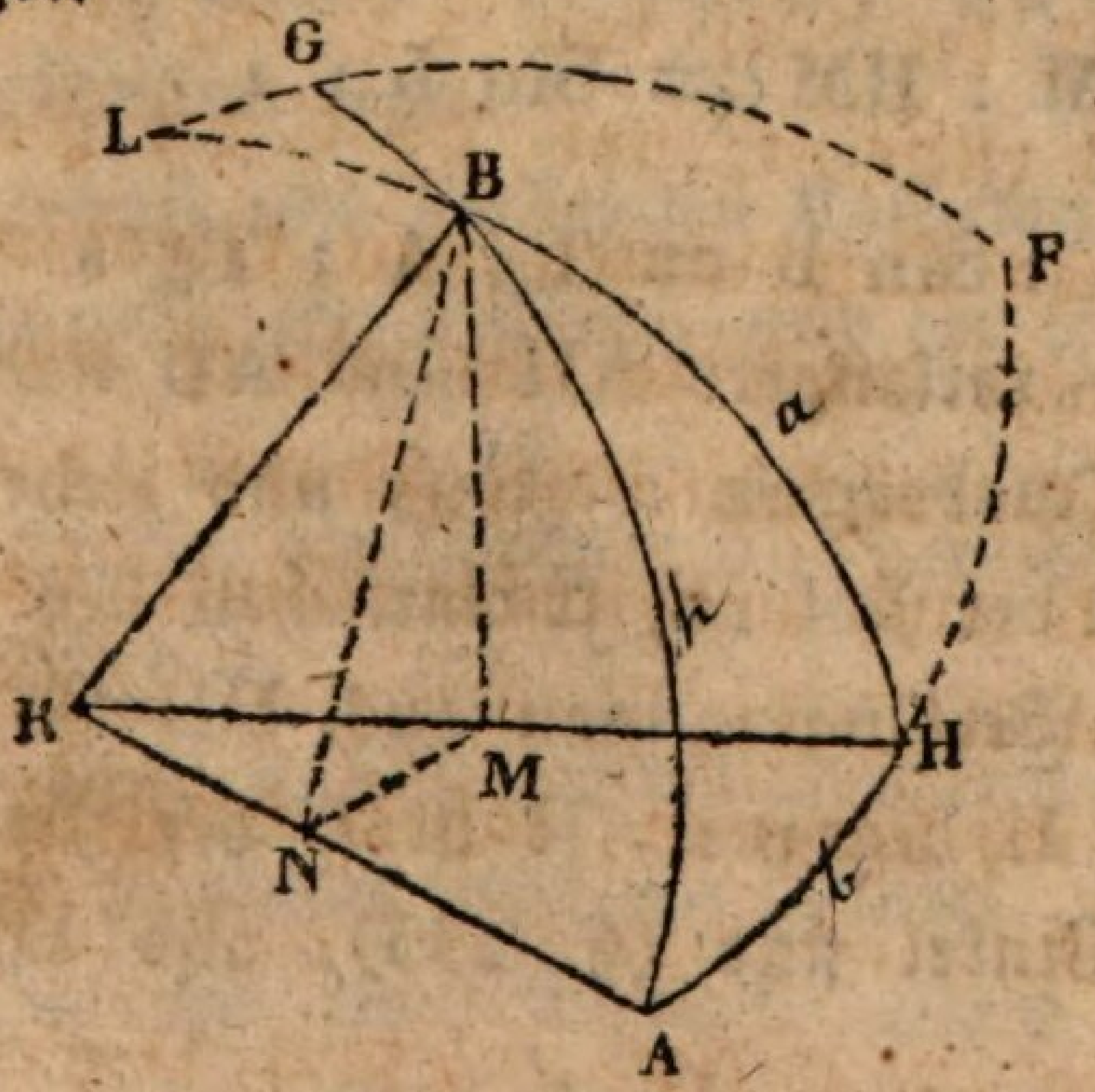
§. 240. Es ist AC + GF = AG + FC = 180° (§. 238). Da nun GF das Maß des Winkels β ist (§. 236), so folgt hieraus der Satz:

Die Winkel des sphärischen Dreyecks $\alpha\beta\gamma$ ergänzen die gegenüberstehenden Seiten des gegebenen sphärischen Dreyecks ABC zu 180°.

§. 241. Da $A + B + C = 3.\ 180° - (\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta)$ (§. 239), aber $\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta$ jedesmal $< 2.\ 180°$ (§. 233); so ist in jedem sphärischen Dreyeck $A + B + C > 3.\ 180° - 2.\ 180°$, d. i. $> 180°$; hingegen $< 3.\ 180°$. Die Summe der Winkel eines sphärischen Dreyecks fällt also jedesmal zwischen 180° und 540°.

§. 242. Im Folgenden werden wir, wie bey ebenen Dreyecken, die drey Winkel des sphärischen Dreyecks mit A, B, C, und die diesen gegenüber liegenden Seiten mit a, b und c bezeichnen. Nur bey sphärischen Dreyecken mit einem rechten Winkel, die man vorzugsweise rechtwinklichte sphärische Dreyecke nennt, wollen wir die Hypotenuse mit h und den dieser gegenüber liegenden rechten Winkel mit H bezeichnen.

§. 243. Es sey AHB ein rechtwinklichtes sphärisches Dreyeck, mit einem rechten Winkel bey H; K sey der Mittelpunkt der zugehörigen Kugel.



Man fälle aus B das Perpendikel BM auf KH, und aus M das Perpendikel MN auf KA und ziehe BN; so steht, da der Win-

kel H, also auch der Neigungswinkel der beyden Ebenen BKH und HKA (§. 231) ein rechter ist, mithin beyde Ebenen auf einander senkrecht sind (§. 149), auch BM auf der ganzen Ebene HKA senkrecht (§. 151); also steht auch die Ebene BMN auf der Ebene HKA senkrecht (§. 150), und BMN ist ein rechtwinklichtes Dreyeck (§. 143).

Weil ferner KN auf MN, und die Ebene KMN und MNB auf einander senkrecht sind, so steht KN auf der ganzen Ebene BMN senkrecht (§. 151), also auch senkrecht auf BN (§. 143), und BNM ist der Neigungswinkel der beyden Ebenen BKA und HKA (§. 148), also dem Winkel A gleich.

Nun ist

$$KB : BM = 1 : \text{Sin } a$$

und

$$NB : KB = \text{Sin } h : 1$$

also

$$NB : BM = \text{Sin } h : \text{Sin } a$$

Es ist aber auch

$$NB : BM = 1 : \text{Sin } A$$

folglich

$$\text{I.} \quad 1 : \text{Sin } A = \text{Sin } h : \text{Sin } a$$

§. 244. Ferner ist

$$NM : BM = 1 : \text{Tg } A$$

und

$$BM : KM = \text{Tg } a : 1$$

also

$$NM : KM = \text{Tg } a : \text{Tg } A$$

aber auch

$$NM : KM = \text{Sin } b : 1$$

folglich:

$$\text{II.} \quad 1 : \text{Sin } b = \text{Tg } A : \text{Tg } a$$

§. 245. Man verlängere AH und AB nach F und G, so daß AF und AG Quadranten werden, und ziehe den Kreisbogen FG, von welchem A der Pol ist; so entstehen bey F und G rechte Winkel (§. 236). Verlängert man auch HB bis sie der Verlängerung von FG in L begegnet, so ist L der Pol von HF, weil H und F rechte Winkel sind (§. 235), also HL ebenfalls ein Quadrant.

In dem rechtwinklichten sphärischen Dreyeck BGL ist nach I. (§. 243.)

$$1 : \text{Sin } L = \text{Sin } BL : \text{Sin } BG$$

also auch im Δ AHB, da $\text{Sin } L = \text{Sin } HF = \text{Cos } AH$, $\text{Sin } BL = \text{Cos } BH$ und $\text{Sin } BG = \text{Cos } AB$ ist,

$$\text{III.} \quad 1 : \text{Cos } b = \text{Cos } a : \text{Cos } h$$

§. 246. Eben so ist nach I. (§. 243)

$$1 : \text{Sin } B = \text{Sin } BL : \text{Sin } GL$$

daher

$$\text{IV.} \quad 1 : \text{Sin } B = \text{Cos } a : \text{Cos } A$$

§. 247. Ferner ist nach II. (§. 244)

$$1 : \text{Sin } GL = \text{Tg } L : \text{Tg } BG$$

daher

$$1 : \text{Cos } A = \text{Cot } b : \text{Cot } h$$

oder

$$\text{V.} \quad 1 : \text{Cos } A = \text{Tg } h : \text{Tg } b \quad (\text{§. 211. VII.})$$

§. 248. Eben so ist nach II. (§. 244)

$$1 : \text{Sin } BG = \text{Tg } B : \text{Tg } GL$$

daher

$$\text{VI.} \quad 1 : \text{Cos } h = \text{Tg } B : \text{Cot } A$$

§. 249. Von dem rechtwinklichten sphärischen Dreyeck müssen außer dem rechten Winkel immer noch zwey Stücke gegeben seyn, um daraus ein drittes Stück zu finden. Wenn man obige sechs Formeln als eben so viele Gleichungen zwischen je dreyen Stücken, nähmlich zweyen gegebenen und einem gesuchten, betrachtet; so lassen sich mit Hülfe derselben alle möglichen Fälle, die bey rechtwinklichten sphärischen Dreyecken vorkommen können, auflösen. Die drey Stücke können nähmlich seyn

1.) Die Hypotenuse und die beyden Katheten. Auflösung nach III.
2.) Die Hypotenuse, ein Kathete, und der eingeschlossene Winkel. Nach V.
3.) Die Hypotenuse, ein Kathete und der ihm gegenüber liegende Winkel. Nach I.
4.) Die Hypotenuse und die beyden anliegenden Winkel. Nach VI.
5.) Die beyden Katheten und ein Winkel. Nach II.
6.) Ein Kathete und zwey Winkel. Nach IV.

Exemp. 1. Aus einem Katheten und dem ihm gegenüber liegenden Winkel den andern Katheten zu finden.

Die drey Stücke sind hier: Die beyden Katheten und ein Winkel (No. 5). Daher nach II.

$$1 : \text{Sin } b = \text{Tg } A : \text{Tg } a$$

also

$$\text{Sin } b = \frac{\text{Tg } a}{\text{Tg } A}$$

Exemp. 2. Wenn die beyden Katheten gegeben sind, die Hypotenuse zu finden.

Die drey Stücke sind hier: Die Hypotenuse und die beyden Katheten (No. 1). Daher nach III.

$$1 : \text{Cos } b = \text{Cos } a : \text{Cos } h$$

also

$$\text{Cos } h = \text{Cos } a \,.\, \text{Cos } b$$

§. 250. Die Berechnung schiefwinklichter sphärischer Dreyecke verrichtet man zum Theil am leichtesten dadurch, daß man aus einer der Spitzen des Dreyecks den Bogen eines größten Kreises senkrecht auf die gegenüber liegende Seite zieht; und nun die Regeln der Berechnung rechtwinklichter sphärischer Dreyecke mehrmals nach einander anwendet. Für andere Fälle leitet man sich Formeln her, mittelst welcher sich die gesuchten Stücke unmittelbar berechnen lassen.

Fig. 1.

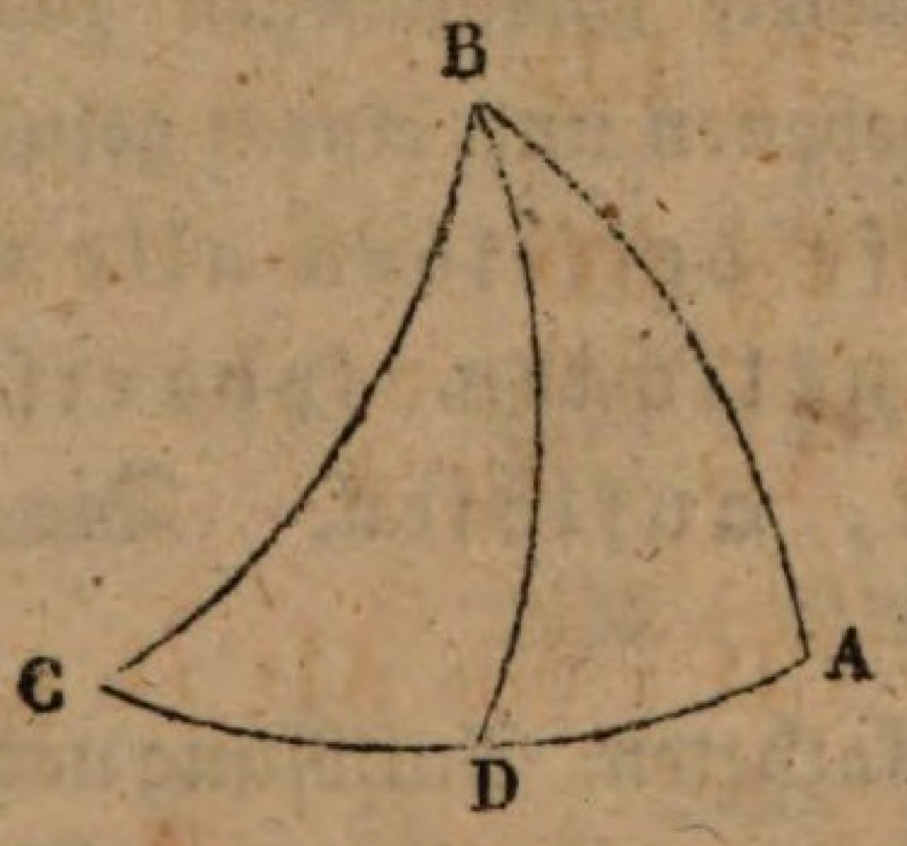
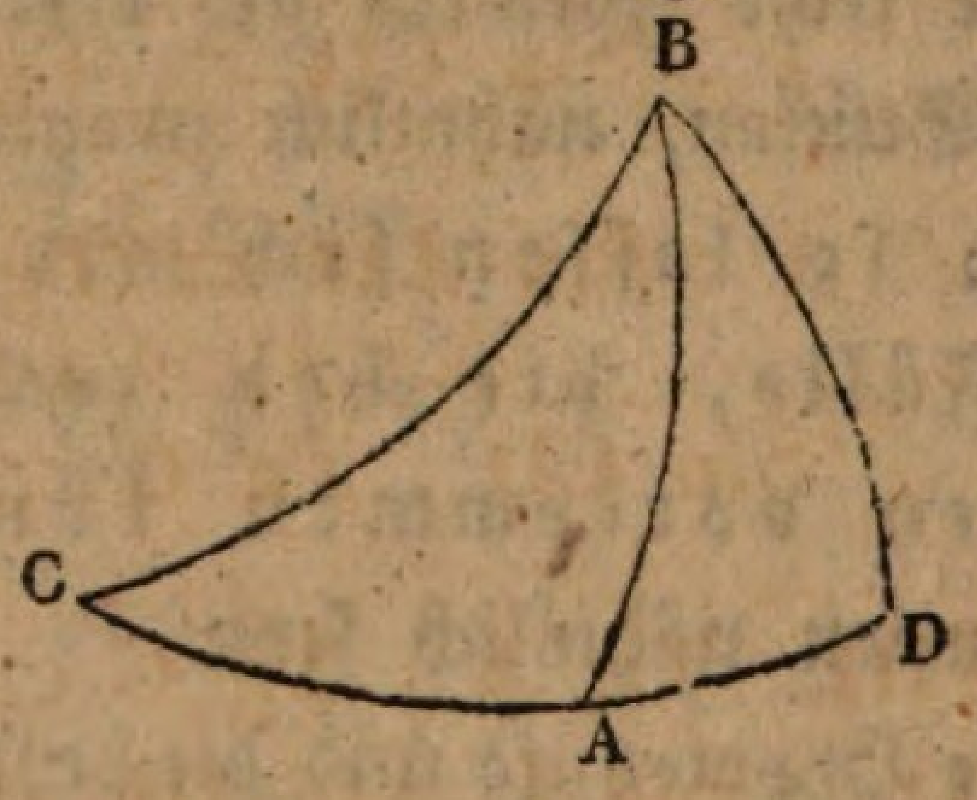


Fig. 2.



§. 251. ABC sey ein schiefwinklichtes sphärisches Dreyeck, so fällt das Perpendikel BD aus B entweder auf die Seite AC selbst, wie Fig. 1, oder auf deren Verlängerung, wie Fig. 2.

Wäre BD ein Quadrant, oder B der Pol von AC, so wären BC und AB ebenfalls Quadranten, und C und A wären rechte Winkel (§. 235 und 236). Es wären dann alle größten Kreise durch B auf AC senkrecht.

Denkt man sich nun in Fig. 1 und 2 die Spitze B um weniger als 90° von D entfernt, so sind auch die Winkel BCD

und BAD beyde kleiner als 90°. Wäre hingegen $BD > 90^\circ$, so wären auch die Winkel BCD und BAD beyde $> 90^\circ$.

In Fig. 2 liegt nicht BAD, sondern sein Nebenwinkel BAC im sphärischen Dreyeck BAC. Es ist also BAC stumpf, wenn BCA spitz, und spitz, wenn BCA stumpf ist.

Daher die Regel, die man z. B. bey Anwendung der Formel §. 253 berücksichtigen muß: wenn die beyden Winkel an der Grundlinie gleichartig, d. h. beyde spitz oder beyde stumpf, sind, so fällt das Perpendikel aus der Spitze innerhalb des Dreyecks. Es fällt hingegen außerhalb, wenn die beyden Winkel ungleichartig sind.

§. 252. Aus der Formel

$$1 : \text{Sin } h = \text{Sin } A : \text{Sin } a \quad (\text{§. } 244. \text{ I.})$$

ergibt sich, durch bloße Vertauschung der Buchstaben A und a mit mit B und b, auch

$$1 : \text{Sin } h = \text{Sin } B : \text{Sin } b$$

daher

$$\text{VII.} \quad \text{Sin } A : \text{Sin } a = \text{Sin } B : \text{Sin } b$$

d. h. es verhalten sich die Sinussen der Winkel, wie die Sinussen der gegenüber liegenden Seiten.

§. 253. Aus §. 244. II. ist (s. Fig. zu §. 250)

$$1 : \text{Sin } CD = \text{Tg } C : \text{Tg } BD$$

und

$$1 : \text{Sin } AD = \text{Tg } A : \text{Tg } BD$$

daher

$$\text{Sin } CD \,.\, \text{Tg } C = \text{Sin } AD \,.\, \text{Tg } A$$

folglich

$$\text{VIII.} \quad \text{Tg } A : \text{Tg } C = \text{Sin } CD : \text{Sin } AD \quad (\text{I. §. } 89)$$

§. 254. Aus §. 245 III. ist

$$1 : \text{Cos } BD = \text{Cos } CD : \text{Cos } BC$$

und

$$1 : \text{Cos } BD = \text{Cos } AD : \text{Cos } AB$$

daher

$$\text{IX.} \quad \text{Cos } CD : \text{Cos } CB = \text{Cos } AD : \text{Cos } AB$$

§. 255. Aus §. 246 IV. ist

$$1 : \text{Sin } CBD = \text{Cos } BD : \text{Cos } C$$

und

$$1 : \text{Sin } ABD = \text{Cos } BD : \text{Cos } A$$

daher

$$\text{X.} \quad \text{Sin } CBD : \text{Sin } ABD = \text{Cos } C : \text{Cos } A$$

§. 256. Aus §. 247 V. ist

$$1 : \text{Cos CBD} = \text{Tg BC} : \text{Tg BD}$$

und

$$1 : \text{Cos ABD} = \text{Tg BA} : \text{Tg BD}$$

daher

$$\text{XI.} \quad \text{Tg BC} : \text{Tg BA} = \text{Cos ABD} : \text{Cos CBD}$$

§. 257. Es ist

$$\text{XII.} \quad \text{Cos C} = \frac{\text{Cos c} - \text{Cos a} \cdot \text{Cos b}}{\text{Sin a} \cdot \text{Sin b}}$$

Bew. Aus §. 254 IX. ist

$$\text{Cos CD} : \text{Cos a} = \text{Cos AD} : \text{Cos c}$$

daher

$$\text{Cos AD} = \frac{\text{Cos CD} \cdot \text{Cos c}}{\text{Cos a}}$$

Es ist aber auch

$$\text{Cos AD} = \text{Cos}(\text{b} - \text{CD}) \text{ (Fig. 1)}$$
$$= \text{Cos b} \cdot \text{Cos CD} + \text{Sin b} \cdot \text{Sin CD} \text{ (§. 214 XIV)}$$

daher, indem man die beyden Werthe für Cos AD einander gleich setzt,

$$\text{Sin b} \cdot \text{Sin CD} = \frac{\text{Cos CD} \cdot \text{Cos c}}{\text{Cos a}} - \text{Cos b} \cdot \text{Cos CD}$$

Auf beyden Seiten durch Cos CD dividirt, gibt

$$\text{Sin b} \cdot \text{Tg CD} = \frac{\text{Cos c}}{\text{Cos a}} - \text{Cos b} = \frac{\text{Cos c} - \text{Cos a} \cdot \text{Cos b}}{\text{Cos a}}$$

also

$$\text{Tg CD} = \frac{\text{Cos c} - \text{Cos a} \cdot \text{Cos b}}{\text{Cos a} \cdot \text{Sin b}}$$

Es ist aber auch aus §. 247 V.

$$1 : \text{Cos C} = \text{Tg a} : \text{Tg CD}$$

also

$$\text{Tg CD} = \text{Cos C} \cdot \text{Tg a} = \frac{\text{Cos C} \cdot \text{Sin a}}{\text{Cos a}}$$

Daher

$$\frac{\text{Cos C} \cdot \text{Sin a}}{\text{Cos a}} = \frac{\text{Cos c} - \text{Cos a} \cdot \text{Cos b}}{\text{Cos a} \cdot \text{Sin b}}$$

folglich

$$\text{cos C} = \frac{\text{Cos c} - \text{Cos a} \cdot \text{Gos b}}{\text{Sin a} \cdot \text{Sin b}}$$

Anmerkung. Nach Fig. 2 wäre $\text{Cos AD} = \text{Cos}(\text{CD} - \text{b}) = \text{Cos b} \cdot \text{Cos CD} + \text{Sin b} \cdot \text{Sin CD}$, also gerade dasselbe gewesen, wie nach Fig. 1.

§. 258. Aus dieser Formel ergibt sich auch

$$\text{Sinv C} = 1 - \text{Cos C} = \frac{\text{Sin a} \cdot \text{Sin b} + \text{Cos a} \cdot \text{Cos b} - \text{Cos c}}{\text{Sin a} \cdot \text{Sin b}}$$
$$= \frac{\text{Cos}(\text{a} - \text{b}) - \text{Cos c}}{\text{Sin a} \cdot \text{Sin b}} \text{ (§. 214 XIV.)}$$

Setzt man $a - b = \alpha - \beta$ und $c = \alpha + \beta$, so hat man

$$\text{Cos}\,(a - b) - \text{Cos}\,c = \text{Cos}\,(\alpha - \beta) - \text{Cos}\,(\alpha + \beta)$$

Es ist aber

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos}\,(\alpha - \beta) = \text{Cos}\,\alpha\,.\,\text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Sin}\,\beta \\ \text{und} \\ \text{Cos}\,(\alpha + \beta) = \text{Cos}\,\alpha\,.\,\text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Sin}\,\beta\end{array}\right\}\ \S.\,214.$$

daher $\text{Cos}(\alpha - \beta) - \text{Cos}\,(\alpha + \beta) = 2\,\text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Sin}\,\beta$

also

$$\text{Sinv}\,C = \frac{2\,\text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Sin}\,\beta}{\text{Sin}\,a\,.\,\text{Sin}\,b}$$

Aus den beyden Gleichungen $\alpha - \beta = a - b$ und $\alpha + \beta = c$ erhält man aber $\alpha = \frac{c + (a - b)}{2}$ und $\beta = \frac{c - (a - b)}{2}$

also

$$\text{Sinv}\,C = \frac{2\,\text{Sin}\,\frac{c + (a - b)}{2}\,.\,\text{Sin}\,\frac{c - (a - b)}{2}}{\text{Sin}\,a\,.\,\text{Sin}\,b}$$

oder, da $\text{Sinv}\,C = 2\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}\,C^2$ ist (215 XXI),

$$\text{XIII.}\ (\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}C)^2 = \frac{2\,\text{Sin}\,\frac{c + (a - b)}{2}\,.\,\text{Sin}\,\frac{c - (a - b)}{2}}{\text{Sin}\,a\,.\,\text{Sin}\,b}$$

§. 259. Aus §. 257 XII. ergibt sich ferner

$$\text{XIV.}\ \text{Cos}\,c = \text{Cos}\,C\,.\,\text{Sin}\,a\,.\,\text{Sin}\,b + \text{Cos}\,a\,.\,\text{Cos}\,b$$

§. 260. Aus §. 252 VII. ist

$$\text{Sin}\,A : \text{Sin}\,a = \text{Sin}\,C : \text{Sin}\,c$$

also

$$\text{Sin}\,a = \frac{\text{Sin}\,A\,.\,\text{Sin}\,c}{\text{Sin}\,C}$$

Substituirt man diesen Werth für Sin a in XIV, so wird

$$\text{Cos}\,C\,.\,\frac{\text{Sin}\,A\,.\,\text{Sin}\,c}{\text{Sin}\,C}\,.\,\text{Sin}\,b = \text{Cos}\,c - \text{Cos}\,a\,.\,\text{Cos}\,b$$

oder

$$\text{Cot}\,C\,.\,\text{Sin}\,A\,.\,\text{Sin}\,c\,.\,\text{Sin}\,b = \text{Cos}\,c - \text{Cos}\,b\,.\,\text{Cos}\,a$$

$$= \text{Cos}\,c - \text{Cos}\,b\,(\text{Cos}\,A\,.\,\text{Sin}\,b\,.\,\text{Sin}\,c + \text{Cos}\,b\,.\,\text{Cos}\,c)$$

(§. 259 XIV)

$$= \text{Cos}\,c - \text{Cos}\,c\,.\,\text{Cos}\,b^2 - \text{Cos}\,A\,.\,\text{Cos}\,b\,.\,\text{Sin}\,c\,.\,\text{Sin}\,b$$

$$= \text{Cos}\,c\,(1 - \text{Cos}\,b^2) - \text{Cos}\,A\,.\,\text{Cos}\,b\,.\,\text{Sin}\,c\,.\,\text{Sin}\,b$$

$$= \text{Cos}\,c\,.\,\text{Sin}\,b^2 - \text{Cos}\,A\,.\,\text{Cos}\,b\,.\,\text{Sin}\,c\,.\,\text{Sin}\,b$$

Wenn man hier überall durch Sin c . Sin b dividirt, so wird

$$\text{XV.}\ \text{Cot}\,C\,.\,\text{Sin}\,A = \text{Cot}\,c\,.\,\text{Sin}\,b - \text{Cos}\,A\,.\,\text{Cos}\,b$$

§. 261. Es ist

$$\text{XVI.}\quad \cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}$$

Bew. Aus §. 257 XII. hat man (Fig. zu §. 238)

$$\cos\gamma = \frac{\cos\alpha\beta - \cos\beta\gamma \cdot \cos\alpha\gamma}{\sin\beta\gamma \cdot \sin\alpha\gamma}$$

also, da $\cos\gamma = -\cos AB$ (§. 240 und 217) $= -\cos c$, $\cos\alpha\beta = -\cos C$ (§. 239), $\cos\beta\gamma = -\cos A$, $\cos\alpha\gamma = -\cos B$, $\sin\beta\gamma = \sin A$ (§. 218), $\sin\alpha\gamma = \sin B$ ist,

$$-\cos c = \frac{-\cos C - \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}$$

oder

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}$$

§. 262. Daraus ist

$$\text{XVII.}\quad \cos C = \cos c \cdot \sin A \cdot \sin B - \cos A \cdot \cos B$$

§. 263. Aus XIII §. 258 hat man (Fig. zu §. 238)

$$(\sin\tfrac{1}{2}\gamma)^2 = \frac{\sin\frac{\alpha\beta + \beta\gamma - \alpha\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\alpha\beta - \beta\gamma + \alpha\gamma}{2}}{\sin\beta\gamma \cdot \sin\alpha\gamma}$$

Es ist aber $\sin\frac{1}{2}\gamma = \sin\frac{1}{2}(180^\circ - AB) = \sin(90^\circ - \frac{1}{2}AB) = \cos\frac{1}{2}c$; ferner

$$\frac{\alpha\beta + \beta\gamma - \alpha\gamma}{2} = \frac{180^\circ - C + 180^\circ - A - 180^\circ + B}{2}$$

$$= 90^\circ - \frac{C + A - B}{2}$$

also

$$\sin\frac{\alpha\beta + \beta\gamma - \alpha\gamma}{2} = \cos\frac{C + A - B}{2}$$

Eben so

$$\frac{\alpha\beta - \beta\gamma + \alpha\gamma}{2} = \frac{180^\circ - C - 180^\circ + A + 180^\circ - B}{2}$$

$$= 90^\circ - \frac{C - (A - B)}{2}$$

also

$$\sin\frac{\alpha\beta - \beta\gamma + \alpha\gamma}{2} = \cos\frac{C - (A - B)}{2}$$

daher

$$\text{XVIII.}\quad (\cos\tfrac{1}{2}c)^2 = \frac{\cos\frac{C + (A - B)}{2} \cdot \cos\frac{C - (A - B)}{2}}{\sin A \cdot \sin B}.$$

§. 264. In obigen Formeln ist die Auflösung aller möglichen Fälle enthalten, die bey schiefwinklichten sphärischen Dreyecken vorkommen können. Es werden hier immer vier Stücke des Dreyecks zusammen in eine Gleichung gesetzt, um aus dreyen derselben das vierte unbekannte zu finden:

1.) drey Seiten und ein Winkel. §. 257 XII.

2.) zwey Seiten und zwey Winkel, die ihnen gegenüber liegen. §. 252. VII.

3.) zwey Seiten, ein eingeschlossener und ein anliegender Winkel. §. 260 XV.

4.) eine Seite und drey Winkel. §. 261 XVI.

Die einzelnen hier möglichen Fälle sind folgende zwölf, die §. 265 — 276 als eben so viele Aufgaben durchgenommen werden.

Gegeben.	Gesucht.
I. Drey Seiten	ein Winkel, Aufgabe 1.
II. Zwey Seiten und ein Winkel.	
a) der eingeschlossene W.	die dritte Seite, Aufg. 2.
	die übrigen Winkel, Aufg. 3.
b) ein nicht eingeschlossener	die dritte Seite, Aufg. 4.
	der eingeschlossene Winkel, Aufg. 5.
	der andere nicht eingeschl. W., Aufg. 6.
III. Eine Seite und 2 Winkel.	
a) die eingeschlossene Seite	eine Seite, Aufg. 7.
	der dritte Winkel, Aufg. 8.
b) die nicht eingeschl. Seite	die eingeschlossene Seite, Aufg. 9.
	die andere nicht eingeschl. Seite, Aufg. 10.
	der dritte Winkel, Aufg. 11.
IV. Drey Winkel	eine Seite, Aufg. 12.

§. 265. Aufg. 1. Aus den drey Seiten die Winkel zu finden.

Auflös. Nach §. 257 XII. ist

$$\mathrm{Cos}\, C = \frac{\mathrm{Cos}\, C - \mathrm{Cos}\, a \,.\, \mathrm{Cos}\, b}{\mathrm{Sin}\, a \,.\, \mathrm{Sin}\, b}$$

Bequemer zur Rechnung mit Logarithmen ist nach §. 258 XIII.

$$(\mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}\, C)^2 = \frac{\mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}\, (c + a - b) \,.\, \mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}\, (c - a + b)}{\mathrm{Sin}\, a \,.\, \mathrm{Sin}\, b}$$

§. 266. Aufg. 2. Aus a, b und C die c zu finden.

Aufl. Nach §. 259 XIV. ist

$$\text{Cos } c = \text{Cos } C \,.\, \text{Sin } a \,.\, \text{Sin } b + \text{Cos } a \,.\, \text{Cos } b$$

§. 267. Aufg. 3. Aus b, c und A den C zu finden.

Aufl. Aus §. 260 XV. ist

$$\text{Cot } C = \frac{\text{Cot } c \,.\, \text{Sin } b - \text{Cos } A \,.\, \text{Cos } b}{\text{Sin } A}$$

§. 268. Aufg. 4. Aus a, c und C die b zu finden.

Aufl. 1. Die Formel §. 257 XII. gibt für Sin b eine quadratische Gleichung.

Aufl. 2. Nach §. 247 V. ist (Fig. zu § 250)

$$1 : \text{Cos } C = \text{Tg } a : \text{Tg } CD$$

woraus CD.

Ferner nach §. 254 IX. ist

$$\text{Cos } CD : \text{Cos } a = \text{Cos } AD : \text{Cos } b$$

woraus AD.

Nun ist $b = CD \pm AD$ (§. 251).

§. 269. Aufg. 5. Aus a, c und C den B zu finden.

Aufl. 1. Die Formel

$$\text{Cot } C \,.\, \text{Sin } B = \text{Cot } c \,.\, \text{Sin } a - \text{Cos } B \,.\, \text{Cos } a$$

welche einerley mit der XVten (§. 260) ist, indem man den Buchstaben für die Seiten und Winkel die gehörige Bedeutung unterlegt, gibt für Sin B eine quadratische Gleichung.

Aufl. 2. Nach §. 248 VI. ist

$$1 : \text{Cos } a = \text{Tg } C : \text{Cot } CBD$$

woraus Winkel CBD.

Ferner nach §. 256 XI. ist

$$\text{Tg } a : \text{Tg } c = \text{Cos } ABD : \text{Cos } CBD$$

woraus ABD.

Nun ist $B = CBD \pm ABD$ (§. 251)

§. 270. Aufg. 6. Aus a, b und A den B zu finden.

Aufl. Aus §. 252 VII. ist

$$\text{Sin } B = \frac{\text{Sin } b \,.\, \text{Sin } A}{\text{Sin } a}$$

§. 271. Aufg. 7. Aus b, A und C die a zu finden.

Aufl. Aus §. 260 XV. ist

$$\mathrm{Cot}\, c = \frac{\mathrm{Cot}\, C \,.\, \mathrm{Sin}\, A + \mathrm{Cos}\, A \,.\, \mathrm{Cos}\, b}{\mathrm{Sin}\, b}$$

§. 272. Aufg. 8. Aus c, A und B den C zu finden.

Aufl. Nach §. 262 XVII. ist

$$\mathrm{Cos}\, C = \mathrm{Cos}\, c \,.\, \mathrm{Sin}\, A \,.\, \mathrm{Sin}\, B - \mathrm{Cos}\, A \,.\, \mathrm{Cos}\, B$$

§. 273. Aufg. 9. Aus c, A und C die b zu finden.

Aufl. 1. Aus §. 260 XV ergibt sich Sin b durch eine quadratische Gleichung.

Aufl. 2. Nach §. 247 V. ist

$$1 : \mathrm{Cos}\, A = \mathrm{Tg}\, c : \mathrm{Tg}\, AD$$

woraus AD.

Ferner ist nach § 253 VIII.

$$\mathrm{Tg}\, A : \mathrm{Tg}\, C = \mathrm{Sin}\, CD : \mathrm{Sin}\, AD$$

woraus CD.

Nun ist $b = CD \pm AD$.

§. 274. Aufg. 10. Aus A, B und a die b zu finden.

Aufl. Aus §. 252 VII. ist

$$\mathrm{Sin}\, b = \frac{\mathrm{Sin}\, B \,.\, \mathrm{Sin}\, a}{\mathrm{Sin}\, A}$$

§. 275. Aufg. 11. Aus A, C und c den B zu finden.

Aufl. 1. Aus §. 262 XVII. ergibt sich Sin B durch eine quadratische Gleichung.

Aufl. 2. Nach §. 248 VI. ist

$$1 : \mathrm{Cos}\, c = \mathrm{Tg}\, A : \mathrm{Cot}\, ABD$$

woraus ABD.

Ferner ist nach §. 255 X.

$$\mathrm{Sin}\, CBD : \mathrm{Sin}\, ABD = \mathrm{Cos}\, C : \mathrm{Cos}\, A$$

woraus CBD.

Nun ist $B = CBD \pm ABD$

§. 276. Aufg. 12. Aus den drey Winkeln die Seiten zu finden.

Aufl. Nach §. 261 XVI. ist

$$\mathrm{Cos}\, c = \frac{\mathrm{Cos}\, C + \mathrm{Cos}\, A \,.\, \mathrm{Cos}\, B}{\mathrm{Sin}\, A \,.\, \mathrm{Sin}\, B}$$

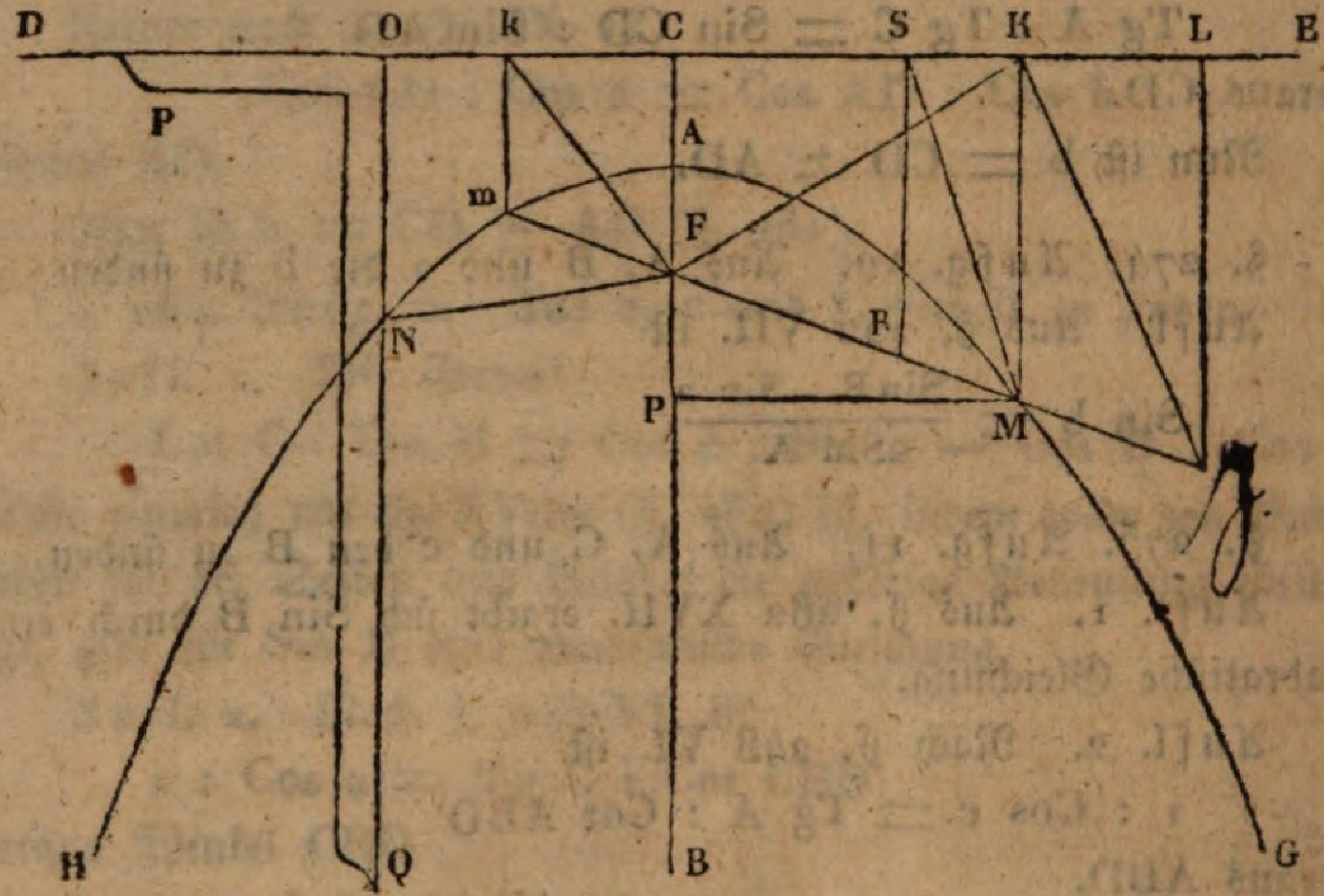
Bequemer zur Rechnung mit Logarithmen ist nach §. 263 XVIII.

$$(\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ c)^2 = \frac{\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ (C + A - B)\ .\ \tfrac{1}{2}\ (C - A + B)}{\text{Sin A . Sin B}}$$

C. Kegelschnitte.

1. Parabel.

§. 277. Eine Linie, in der jeder Punkt von einem gewissen Punkte eben so weit als von einer gewissen geraden Linie absteht, heißt eine Parabel; wie HAG, in welcher jeder Punkt M eben so weit von F als von der geraden Linie DE entfernt, oder MF = dem Perpendikel MK ist.



Jener Punkt F heißt der Brennpunkt; die gerade Linie DE heißt die Directrix, und FM ein Radius vector oder beschreibender Radius.

Die Linie AB, durch F senkrecht auf DE, heißt die Axe, und A der Scheitel der Parabel.

Das Perpendikel MP auf die Axe heißt eine Ordinate und AP die zugehörige Abscisse.

Die vierfache Entfernung AC des Scheitels von der Directrix heißt der Parameter.

Anmerkung. Eine Parabel mechanisch zu verzeichnen, nehme man ein rechtwinklichtes Lineal POQ und einen Faden von der Länge OQ dieses Lineals. Das eine Ende des Fadens befestige man in Q, das andere Ende in F. An DE kann man ebenfalls ein Lineal anlegen. Wenn man nun das Lineal QOP längs DE fortbewegt, während der Faden durch einen Stift in N mit seinem Theil NO an dem Lineal angespannt wird, so beschreibt der Stift eine Parabel.

§. 278. Aus der Erklärung der Parabel (so wie aus der mechanischen Construction derselben) ergibt sich sogleich, daß die Parabel auf beyden Seiten der Axe zwey congruente Schenkel hat; daß diese Schenkel auf beyden Seiten der Axe sich immer mehr von derselben entfernen; daß sich also die Parabel auf der dem Scheitel entgegen gesetzten Seite nicht schließt.

§. 279. Jede gerade durch den Brennpunkt, unter irgend einem Winkel mit der Axe, gezogene Linie begegnet der Parabel in zweyen Punkten.

Bew. FM sey eine solche Linie. Man halbire den Winkel MFC durch FK, ziehe KM parallel mit der Axe AB, so ist der Punkt M, in welchem KM die FM schneidet, ein Punkt der Parabel. Denn es ist Winkel $MKF = KFC = KFM$, also $MK = MF$ (§. 277). gehört nach § 282-284.

Auf dieselbe Art läßt sich beweisen, daß die Linie FM die Parabel noch in einem Punkte m schneidet.

§. 280. Es ist $AF = AC$, also $CF = 2.AC =$ dem halben Parameter (§. 278).

§. 281. Die Ordinate im Brennpunkt ist dem halben Parameter gleich.

§. 282. Ein jeder Punkt innerhalb der Parabel liegt dem Brennpunkt näher als der Directrix.

Bew. R sey ein solcher Punkt. Man ziehe durch R den Radius vector FM, und fälle die Perpendikel RS und MK auf die Directrix; so ist

$$FM = MK \text{ (§. 277)} < SM \text{ (§. 52)} < SR + RM \text{ (§. 53)}$$

oder

$$FR + RM < SR + RM$$

also (Ax.)

$$FR < SR$$

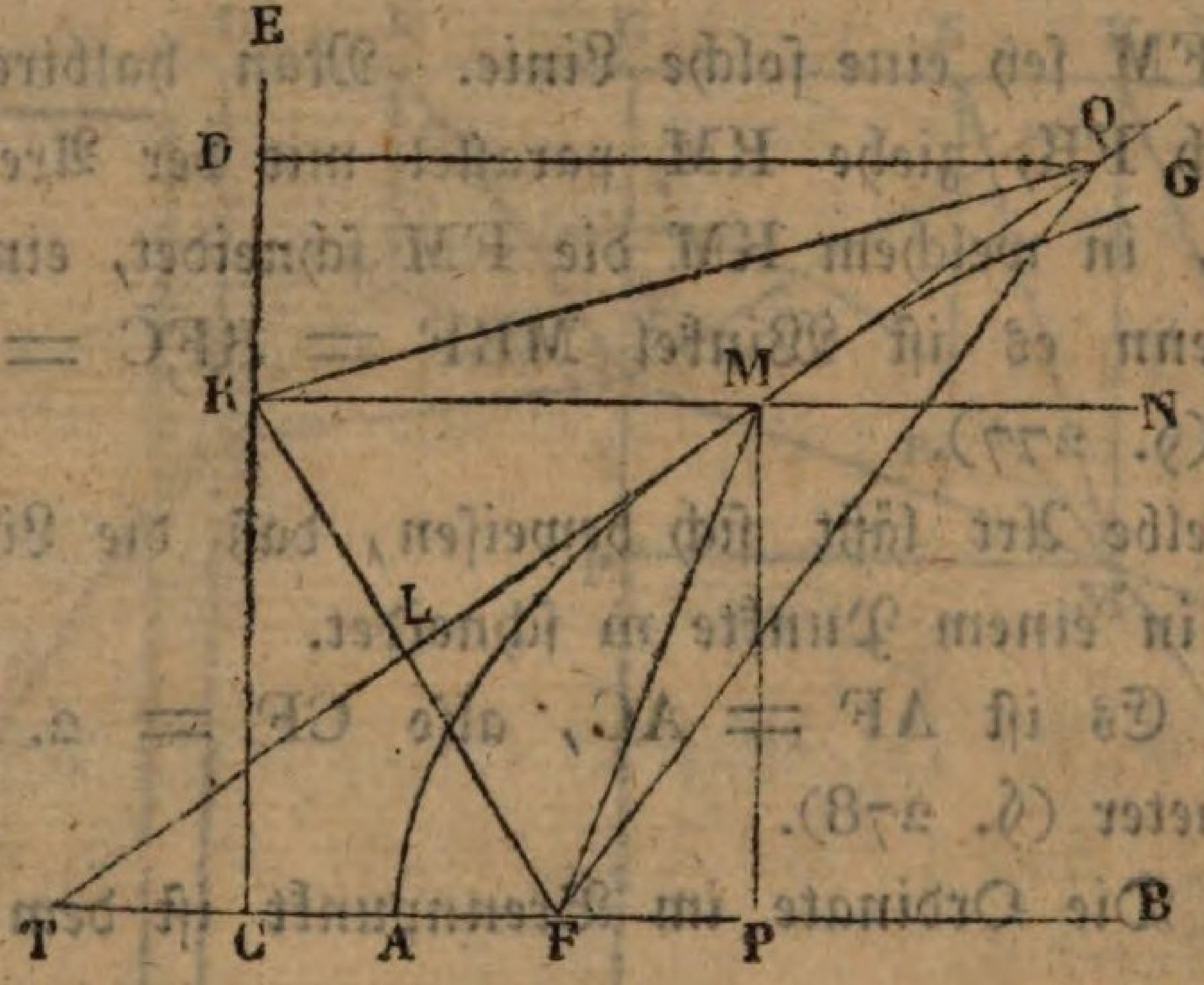
§. 283. Hingegen ein jeder Punkt außerhalb der Parabel liegt der Directrix näher als dem Brennpunkt.

Bew. I sey ein solcher Punkt. Man ziehe IF, welche die Parabel in M durchschneidet, und fälle die Perpendikel MK und IL auf die Directrix; so ist

$$FI = MF + MI = KM + MI \text{ (§. 277)}$$
$$> KI \text{ (§. 53)} > IL \text{ (§. 52)}$$

§. 284. Ein Punkt also, welcher dem Brennpunkt näher als der Directrix liegt, fällt innerhalb, und ein Punkt, welcher der Directrix näher als dem Brennpunkt liegt, außerhalb der Parabel.

§. 285. Eine gerade Linie, welche den Winkel halbirt, den der Radius vector mit dem Perpendikel auf die Directrix macht, hat mit der Parabel keinen Punkt weiter gemein, oder ist eine Tangente der Parabel.



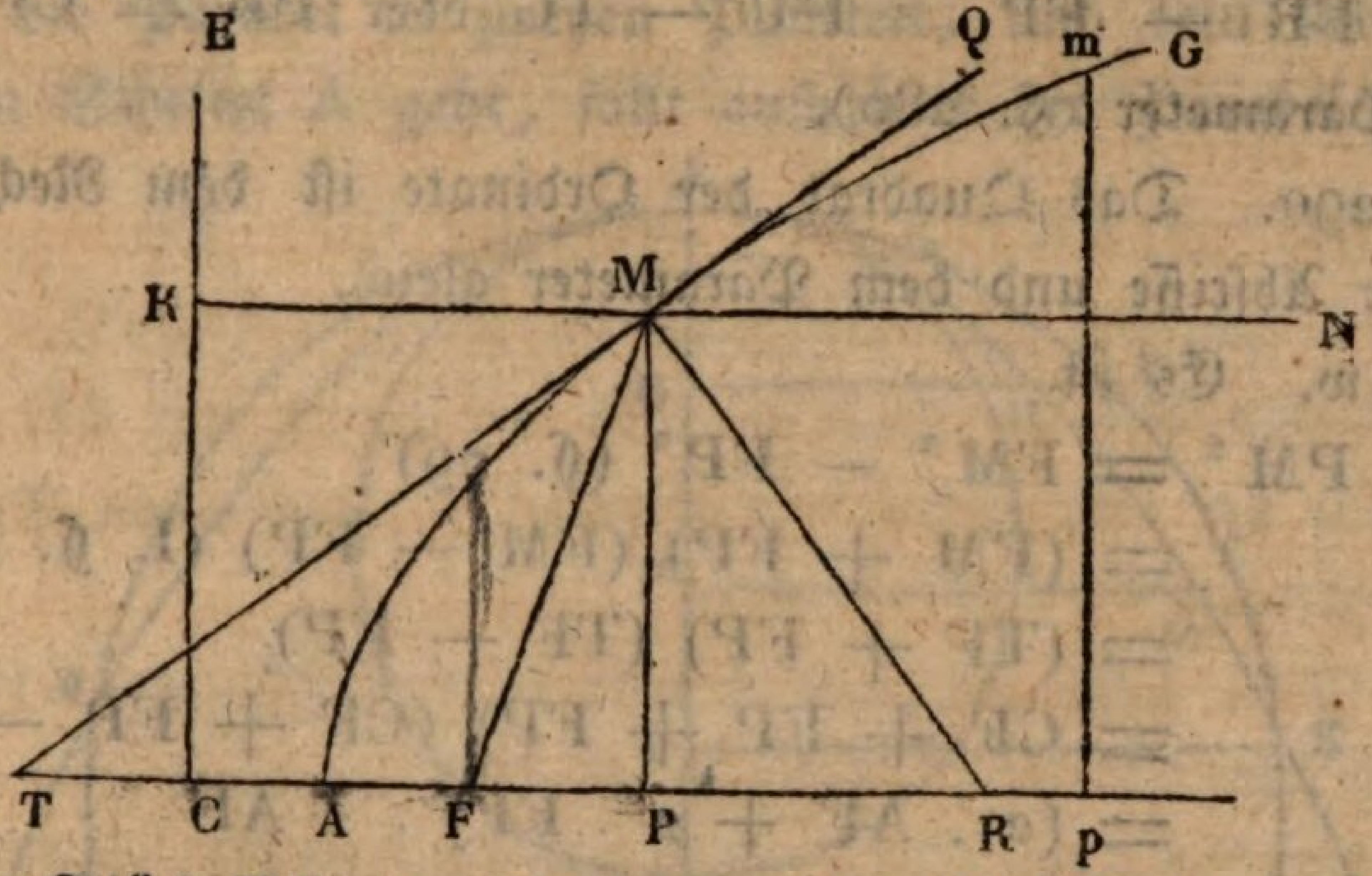
Bew. M sey ein Punkt der Parabel, und KMF der Winkel, welchen der Radius vector FM mit dem Perpendikel KM auf die Directrix macht; so hat die Linie MT, welche diesen Winkel halbirt, außer M keinen Punkt weiter mit der Parabel gemein.

Denn, da △ KML ≅ FML ist (§. 39), so geht MT senkrecht durch KF. Jeder andere Punkt auf MT, z. B. Q, ist also eben so weit von K als von F entfernt (§. 47); daher ist QF größer als das Perpendikel QD auf die Directrix (§. 52), folglich Q ein Punkt außerhalb der Parabel (§. 284).

§. 286. Eine Linie innerhalb der Parabel, parallel mit der Axe, macht mit der Tangente im Berührungspunkt denselben Winkel, den der Radius vector mit der Tangente macht.

Bew. Es sey NM || AB; so ist W. FMT = TMK (§. 285) und W. TMK = NMQ (§. 14); also NMQ = FMT.

§. 287. Ein Perpendikel auf die Tangente im Berührungspunkt bis zu dem Punkte, wo dasselbe die Axe durchschneidet, heißt Normale, wie MR.



Das Stück RP der Axe von diesem Durchschnittspunkt bis zur Ordinate heißt die Subnormale.

Das Stück PT der Axe von der Ordinate bis zum Durchschnittspunkt der verlängerten Axe mit der Tangente heißt die Subtangente.

§. 288. Die Subtangente der Parabel ist immer der doppelten Abscisse gleich.

Bew. Es ist W. MTF = QMN (§. 16) = TMF (§. 286), also

$$TF = FM \text{ (§. 49)} = MK \text{ (§. 277)} = PC$$

daher

$$TF - AC = PC - AC \text{ oder } TC = FP$$

folglich auch

$$TC + AC = PF + AF \text{ oder } TA = AP$$

mithin

$$TP = 2.\ AP$$

§. 289. Die Subnormale der Parabel ist immer dem halben Parameter gleich.

Bew. Da MR senkrecht auf TQ und W. NMQ = FMT ist (§. 286); so ist auch

$$\text{W. } RMQ - NMQ = RMT - FMT$$

oder

$$\text{W. } RMN = RMF$$

Es ist aber auch W. $RMN = MRF$ (§. 17), daher

$$W.\ RMF = MRF$$

mithin

$FR = FM$ (§. 49) $= FT$ (wie im §. 288), also, da (wie im §. 288) $FP = TC$ ist

$FR - FP = FT - TC$ oder $PR = CF =$ dem halben Parameter (§. 280).

§. 290. Das Quadrat der Ordinate ist dem Rechteck zwischen der Abscisse und dem Parameter gleich.

Bew. Es ist

$$\begin{aligned} PM^2 &= FM^2 - FP^2 \text{ (§. 79)} \\ &= (FM + FP)(FM - FP) \text{ (I. §. 50)} \\ &= (TF + FP)(TF - FP) \\ &= (CF + FP + FP)(CF + FP - FP) \\ &= (2 . AF + 2 . FP) . 2 AF \\ &= 2 . AP . 2 AF = 4 . AF . AP \end{aligned}$$

wo AP die Abscisse und $4 . AF$ der Parameter ist, also $4 . AF . AP$ das Rechteck zwischen der Abscisse und dem Parameter ausdrückt.

Anmerkung. Bezeichnet man die Abscisse mit x, die Ordinate mit y und den Parameter mit p, so erhält man

$$y^2 = px.$$

§. 291. Es verhalten sich in der Parabel die Quadrate der Ordinaten wie die Abscissen.

Bew. Es ist

$$PM^2 = 4 . AF . AP \text{ (§. 290)}$$

Eben so

$$pm^2 = 4 . AF . Ap$$

also

$$PM^2 : pm^2 = 4 . AF . AP : 4 . AF . Ap = AP : Ap$$

§. 292. Umgekehrt: eine Linie, in welcher sich die Quadrate der Ordinaten wie die Abscissen verhalten, ist eine Parabel.

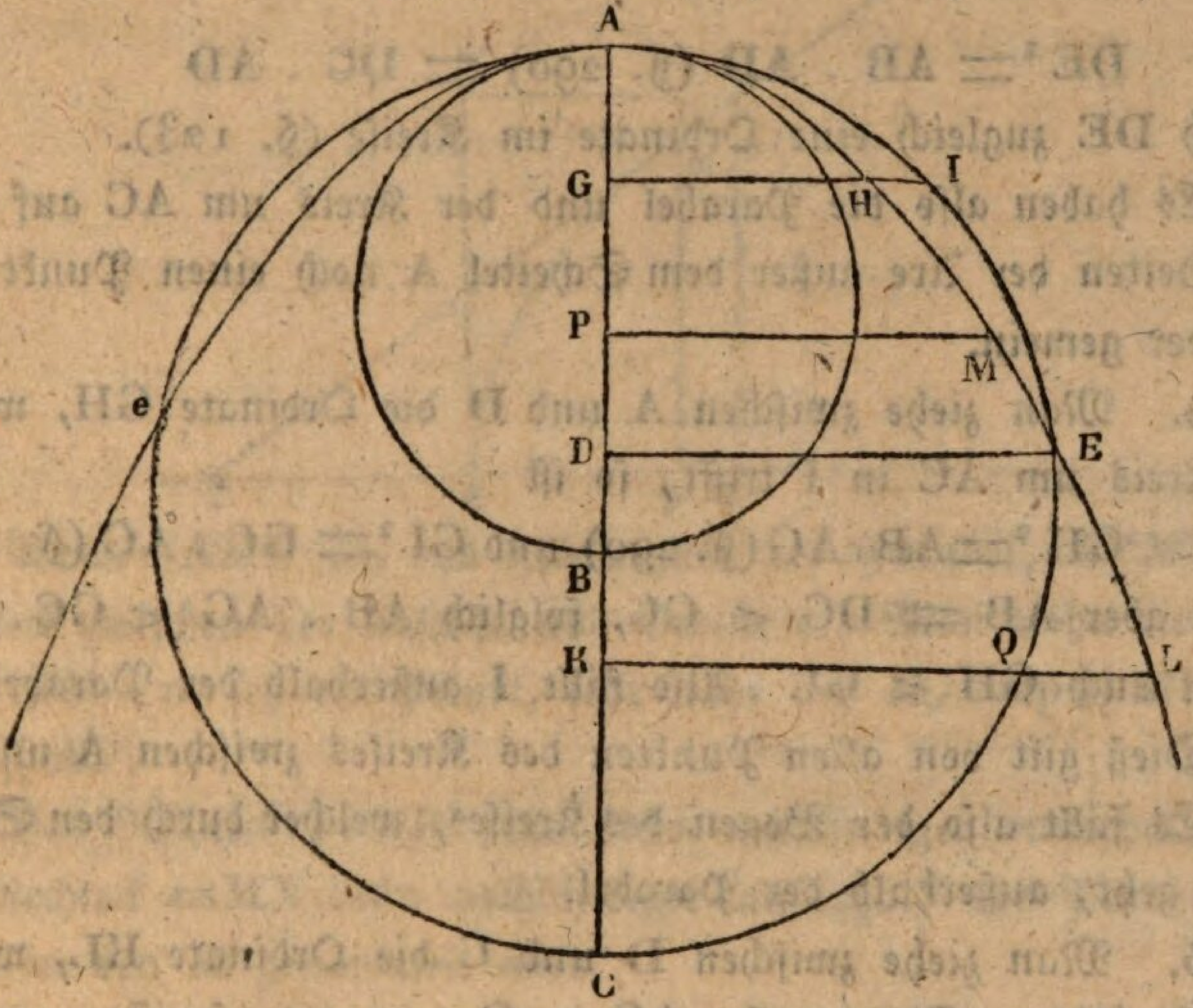
§. 293. Der Parameter ist die dritte geometrische Proportionallinie zu irgend einer Abscisse und der ihr zugehörigen Ordinate.

Bew. Da $PM^2 = 4 . AF . AP$ ist, so verhält sich

$$AP : PM = PM : 4 . AF \text{ (I §. 89).}$$

§. 294. Wenn man auf der Axe einer Parabel von ihrem Scheitel A aus eine Linie AB gleich dem Parameter nimmt, und

über derselben als Durchmesser einen Kreis beschreibt; so fällt dieser Kreis, und noch vielmehr jeder Kreis, der über einem kleineren Stück der Axe als Durchmesser beschrieben wird, ganz innerhalb der Parabel. Jeder Kreis hingegen, der über einem Stück der Axe AC, das größer als AB ist, beschrieben wird, schneidet die Parabel in zweyen Punkten, und sein Bogen, der durch den Scheitel A geht, fällt außerhalb der Parabel.



Bew. 1. Es sey PM eine Ordinate in der Parabel, welche den Kreis um AB in N durchschneidet; so ist

$$PM^2 = AB \cdot AP \text{ (§. 290)}$$

und

$$PN^2 = PB \cdot AP \text{ (§. 116)}$$

Da nun AB immer größer als PB ist, so lange P zwischen A und B fällt; so ist auch

$$AB \cdot AP > PB \cdot AP$$

folglich auch $PM^2 > PN^2$ und $PM > PN$

Es ist also die Ordinate der Parabel immer größer als das zugehörige Perpendikel im Kreise, folglich fällt der Kreis um AB ganz innerhalb der Parabel.

2. Da ein Kreis, der über einem kleineren Stück der Axe als AB beschrieben ist, ganz innerhalb des Kreises vom Durch=

messer AB fällt (§. 123); so fällt um so mehr dieser kleinere Kreis ganz innerhalb der Parabel.

3. Macht man $AD = BC$, und errichtet man in D das Perpendikel DE, welches die Parabel in E trifft, so ist E ebenfalls ein Punkt des Kreises vom Durchmesser AC.

Denn es ist

$$DC = AC - AD = AC - BC = AB$$

also

$$DE^2 = AB \cdot AD \text{ (§. 290)} = DC \cdot AD$$

folglich DE zugleich eine Ordinate im Kreise (§. 123).

Es haben also die Parabel und der Kreis um AC auf beyden Seiten der Axe außer dem Scheitel A noch einen Punkt mit einander gemein.

4. Man ziehe zwischen A und D die Ordinate GH, welche den Kreis um AC in I trifft, so ist

$$GH^2 = AB \cdot AG \text{ (§. 290) und } GI^2 = GC \cdot AG \text{ (§. 123)}$$

Es ist aber $AB = DC < GC$, folglich $AB \cdot AG < GC \cdot AG$, mithin auch $GH < GI$. Also fällt I außerhalb der Parabel.

Dieß gilt von allen Punkten des Kreises zwischen A und E.

Es fällt also der Bogen des Kreises, welcher durch den Scheitel A geht, außerhalb der Parabel.

5. Man ziehe zwischen D und C die Ordinate KL, welche dem Kreis vom Durchmesser AC in Q begegnet, so ist

$LK^2 = AB \cdot AK$ (§. 290) und $QK^2 = KC \cdot AK$. Da aber $KC < DC$ oder $< AB$ ist, so ist auch $QK < LK$, also der Rest des Kreises, der zwischen dem Scheitel und dem Punkt E nicht enthalten ist, ganz innerhalb der Parabel.

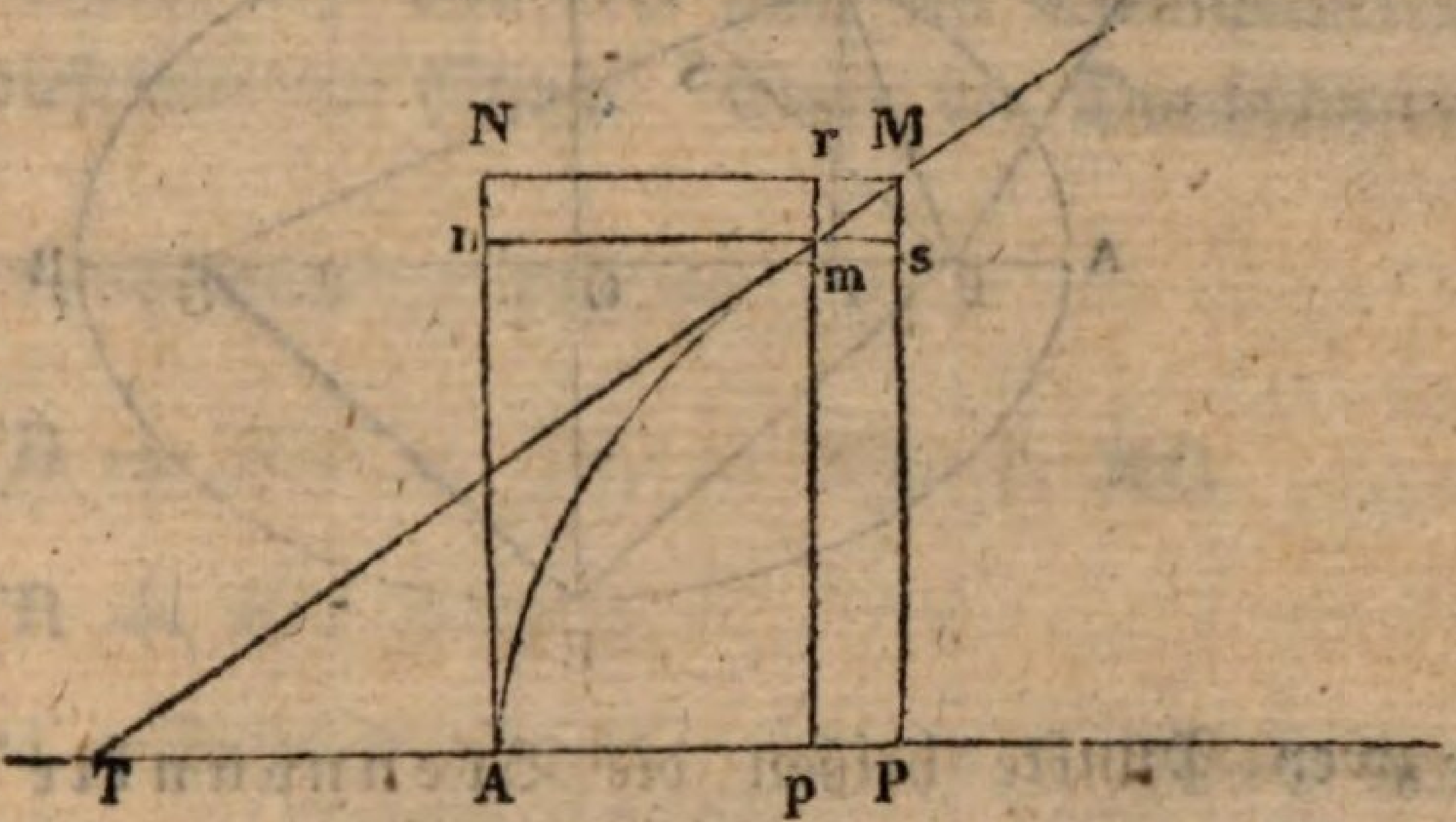
E ist also ein Durchschnittspunkt der Parabel und des Kreises vom Durchmesser AC.

§. 295. Man kann daher durch den Scheitel der Parabel keinen Kreis beschreiben, der in diesem Punkte die Parabel berühre, und zwischen der Parabel und dem über dem Durchmesser AB beschriebenen Kreise hindurch gehe. Daher nennt man den Kreis über AB den Krümmungskreis der Parabel in ihrem Scheitel, d. h. denjenigen Kreis, dessen Krümmung der Krümmung der Parabel in A unter allen möglichen Kreisen am nächsten kommt.

Sein Halbmesser heißt der Krümmungshalbmesser für den Scheitel A.

§. 296. Der Krümmungshalbmesser einer Parabel in ihrem Scheitel ist also dem halben Parameter gleich.

§. 297. Das Flächenstück der Parabel, das von der Abscisse und der zugehörigen Ordinate abgeschnitten wird, ist $= \frac{2}{3}$ des Rechtecks zwischen der Abscisse und Ordinate.



Bew. AMP sey das Flächenstück der Parabel, APMN das Rechteck zwischen der Abscisse und Ordinate. Man ziehe die Tangente MT. m sey ein Punkt, sehr nahe bey M, rmp || MP und smn || AP.

Das Rechteck prMP fällt desto vollständiger innerhalb und das Rechteck nsMN desto vollständiger außerhalb der Parabel, je näher m bey M genommen wird.

Es ist aber das Rechteck prMP immer zweymal so groß als das Rechteck nsMN. Denn es verhält sich

$$ms : sM = TP : PM \quad (§. 91)$$

also ist

$$ms . MP = sM . TP = sM . 2 AP \quad (§. 288)$$
$$= 2 . sM . MN$$

wo nähmlich ms . MP das Rechteck prMP und 2 sM . MN das doppelte Rechteck nsMN ist (§. 75).

Da dieß auf eine ähnliche Art von allen solchen zusammen gehörigen Rechtecken innerhalb und außerhalb der Parabel gilt, so ist die Summe jener oder AMP zweymal so groß als die Summe dieser oder AMN.

Es ist aber

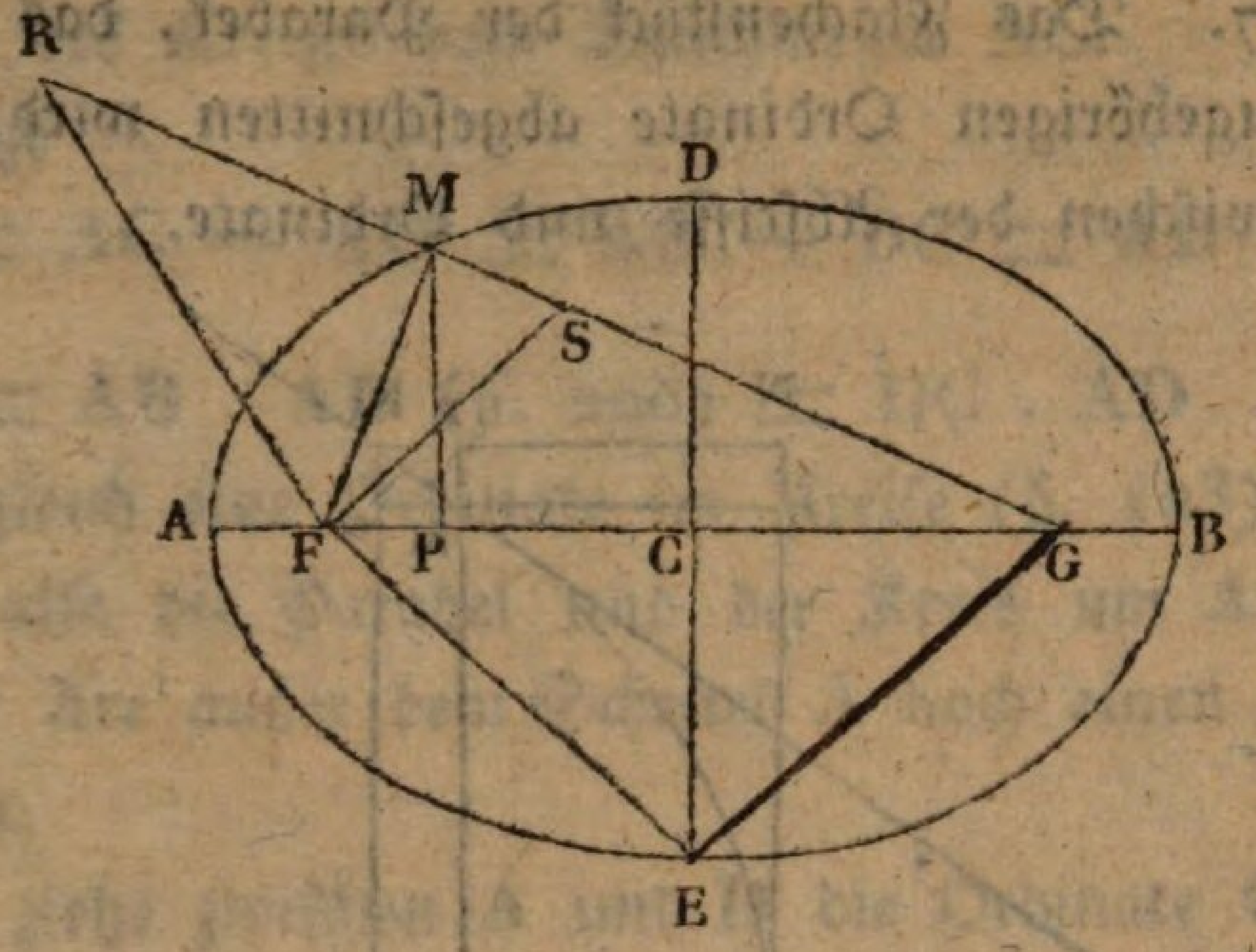
$$AMP + AMN = APMN$$

also

$$AMP = \frac{2}{3} APMN.$$

2. Ellipse.

§. 298. Eine Linie, in der die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes von zweyen bestimmten Punkten gleich groß ist, heißt eine Ellipse, wie AMBE.



Die zwey Punkte heißen die Brennpunkte der Ellipse. Die geraden Linien FM und GM aus den Brennpunkten nach einem beliebigen Punkt M der Ellipse heißen die beschreibenden Radien.

Anm. Wenn man einen Faden nimmt, dessen Länge größer als die Entfernung FG der beyden Brennpunkte von einander ist, die Enden des Fadens in den Brennpunkten F und G befestigt, und nun mit einem Stift M herum fährt, indem man mittelst desselben den Faden FMG gespannt hält, so beschreibt der Stift M eine Ellipse.

§. 299. Eine gerade Linie AB, welche durch die beyden Brennpunkte geht, heißt die große Axe; die Mitte C zwischen den beyden Brennpunkten heißt der Mittelpunkt der Ellipse; ED durch den Mittelpunkt der Ellipse und senkrecht auf die große Axe heißt die kleine Axe. A und B nennt man die Scheitel der großen, D und E die Scheitel der kleinen Axe.

Das beliebige Perpendikel MP auf die große Axe heißt die Ordinate, die Stücke AP und PB die zugehörigen Abscissen.

§. 300. Die dritte Proportionallinie zur großen und kleinen Axe heißt der Parameter.

§. 301. Aus der Construction der Ellipse ergibt sich sogleich, daß dieselbe eine in sich zurückkehrende Linie ist.

§. 302. Die beschreibenden Radien sind zusammen genommen immer der großen Axe gleich.

Und der Mittelpunkt der Ellipse ist zugleich die Mitte der großen Axe.

§. 303. Wenn man aus einem Punkt außerhalb der Ellipse zwey gerade Linien an die Brennpunkte zieht, so ist ihre Summe größer als die große Axe.

Bew. R sey ein Punkt außerhalb der Ellipse. Man ziehe die beyden Linien RF und RG nach den Brennpunkten, so durchschneiden dieselben die Ellipse. Einer der Durchschnittspunkte sey M, so ist

$$FR + RM > FM \quad (\S.\ 53)$$

also

$$FR + RM + MG > FM + MG$$

oder

$$FR + RG > AB.$$

§. 304. Zieht man aber aus einem Punkt innerhalb der Ellipse Linien an die Brennpunkte, so ist ihre Summe kleiner als die große Axe.

Bew. S sey ein Punkt innerhalb der Ellipse. Man ziehe durch S die gerade GM, so ist

$$FS < FM + MS \quad (\S.\ 53)$$

also

$$FS + SG < FM + MS + SG$$

oder

$$FS + SG < AB.$$

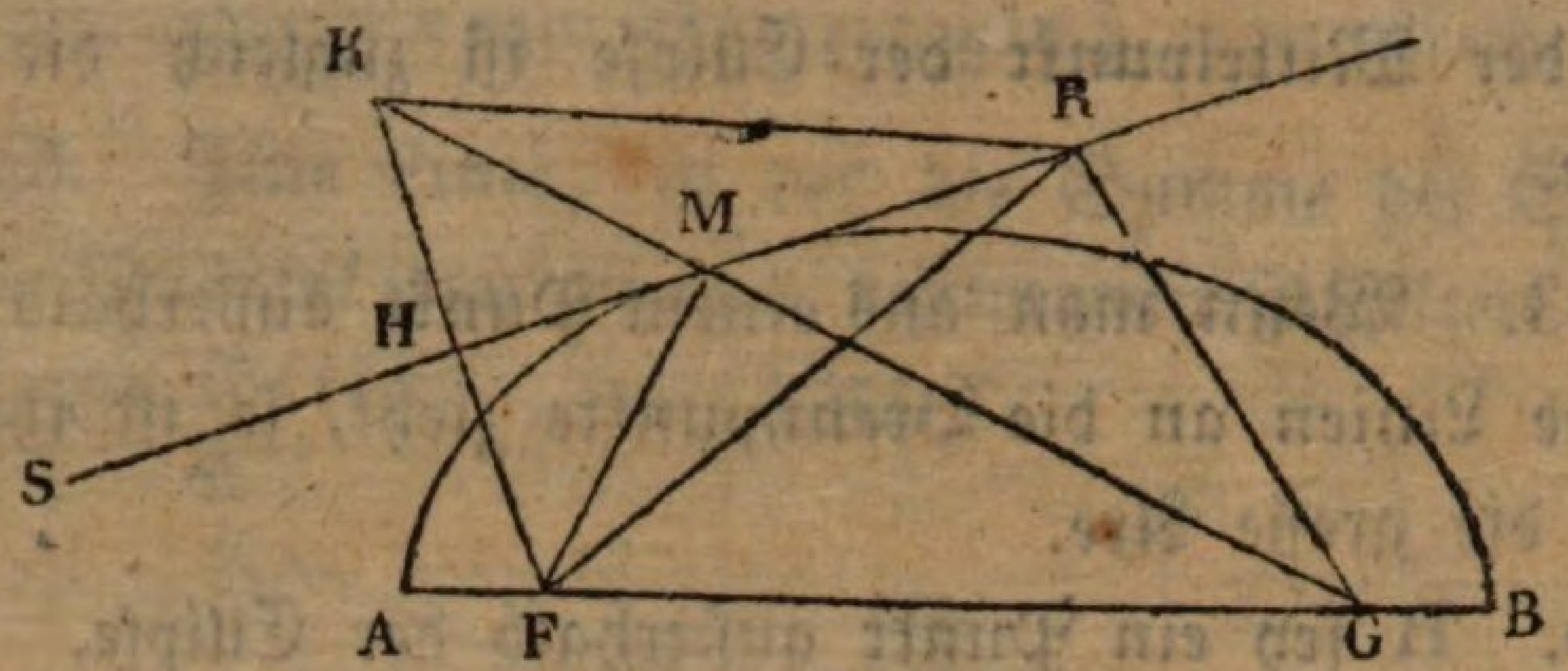
§. 305. Umgekehrt: wenn die Summe der aus einem Punkt an die Brennpunkte gezogenen geraden Linien größer oder kleiner als die große Axe ist; so liegt dieser Punkt in jenem Fall außerhalb, in diesem innerhalb der Ellipse.

§. 306. Die Entfernung des Scheitels der kleinen Axe von jedem der beyden Brennpunkte ist der halben großen Axe gleich.

Bew. Es ist $FE + EG = AB$, aber $FE = EG$; daher $FE = \frac{1}{2} AB = AC$.

Anm. Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich die beyden Brennpunkte bestimmen, wenn die große und kleine Axe gegeben sind.

§. 307. Die gerade Linie, welche den Winkel halbirt, den an einem Punkt der Ellipse der eine Radius vector mit dem verlängerten andern macht, berührt die Ellipse in diesem Punkte.



Bew. Die gerade Linie SM halbire den Winkel KMF, so hat dieselbe außer dem Punkt M keinen Punkt weiter mit der Ellipse gemein.

Denn, macht man MK = MF, so ist Δ KMH ≌ FMH (§. 39), also MH senkrecht auf KF. Es sey R ein beliebiger Punkt auf MH, so ist RK = RF, (§. 47). Nun ist aber

$$RK + RG > KM + MG \text{ (§. 53)}$$

oder

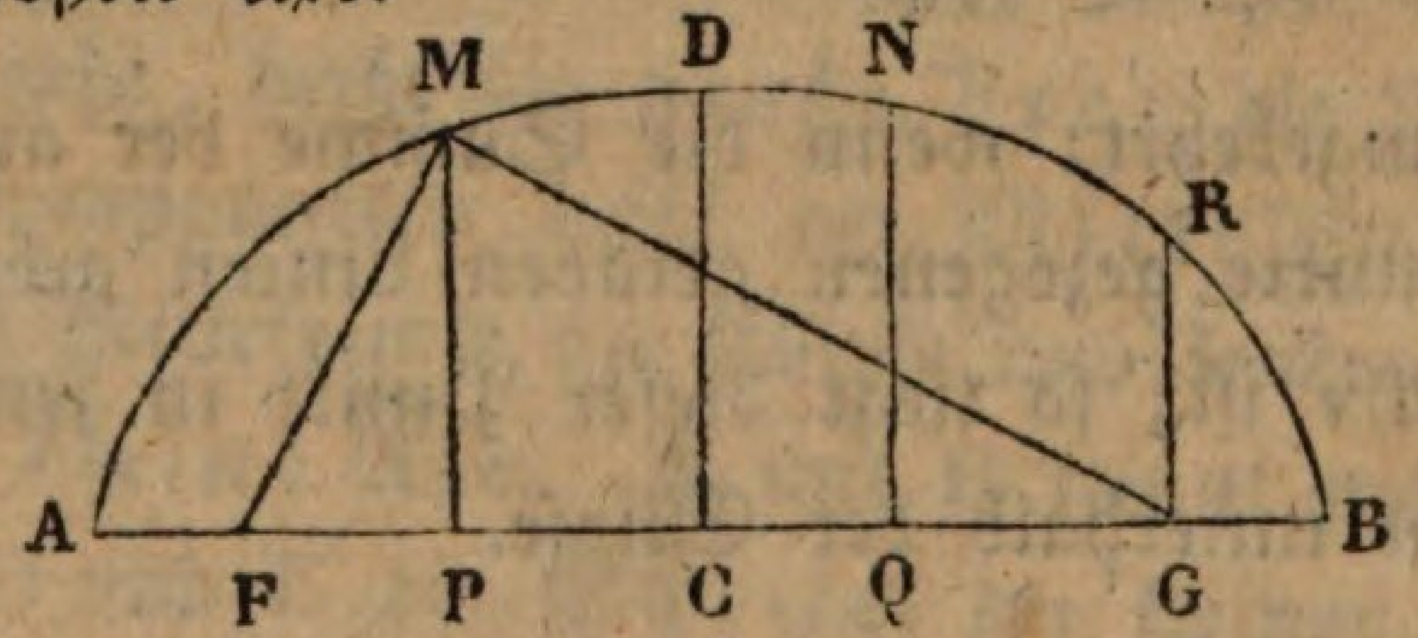
$$FR + RG > FM + MG \text{ oder } > AB$$

folglich ist R ein Punkt außerhalb der Ellipse (§. 305).

§. 308. Die Winkel, welche die beyden beschreibenden Radien mit den Tangenten im Berührungspunkt machen, sind einander gleich.

Bew. Es ist W. GMR = KMS (§. 14) = SMF (§. 307).

§. 309. Das Quadrat der Ordinate verhält sich zum Rechteck der zugehörigen Abscissen wie das Quadrat der kleinen zum Quadrat der großen Axe.



Bew. Die beliebige Ordinate MP sey = y, PC = v, die halbe große Axe AC = a, die halbe kleine Axe CD = b, FC oder die Entfernung des Brennpunkts vom Mittelpunkt = e; so

ist $$FM^2 = MP^2 + FP^2 = y^2 + (e - v)^2$$

also

$$FM = \sqrt{[y^2 + (e - v)^2]}$$

und

$$GM^2 = MP^2 + GP^2 = y^2 + (e + v)^2$$

also

$$GM = \sqrt{[y^2 + (e + v)^2]}$$

Nun ist

$$FM + GM = 2a \text{ oder } FM = 2a - GM$$

daher

$$\sqrt{[y^2 + (e - v)^2]} = 2a - \sqrt{[y^2 + (e + v)^2]}$$

Wenn man beyde Theile der Gleichung quadrirt und zugleich die Quadrate von $e - v$ und $e + v$ wirklich macht, so wird

$$y^2 + e^2 - 2ev + v^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{[y^2 + (e+v)^2]}$$
$$+ y^2 + e^2 + 2ev + v^2$$

daher

$$-4ev - 4a^2 = -4a\sqrt{[y^2 + (e+v)^2]}$$
$$ev + a^2 = a\sqrt{[y^2 + (e+v)^2]}$$

Von Neuem quadrirt, wird

$$e^2v^2 + 2eva^2 + a^4 = a^2[y^2 + e^2 + 2ev + v^2]$$

daher

$$a^4 - a^2v^2 + e^2v^2 - e^2a^2 = a^2y^2$$
$$a^4 - a^2v^2 - (e^2a^2 - e^2v^2) = a^2y^2.$$
$$a^2(a^2 - v^2) - e^2(a^2 - v^2) = a^2y^2$$
$$(a^2 - e^2)(a^2 - v^2) = a^2y^2$$

woraus die Proportion

$$y^2 : a^2 - v^2 = a^2 - e^2 : a^2$$

Nun ist $y^2 = PM^2$

$$a^2 - v^2 = (a+v)(a-v) = BP \,.\, PA$$
$$a^2 - e^2 = FD^2 - FC^2 \text{ (§. 306)} = DC^2$$

und

$$a^2 = AC^2$$

Wenn man diese Werthe in obiger Proportion substituirt, so erhält man

$$PM^2 : BP.PA = CD^2 : AC^2 = 4CD^2 : 4AC^2 \text{ (I. §.92)}$$
$$= DE^2 : AB^2 \text{ (Fig. zu §. 298)}$$

Anm. Bezeichnet man die große Axe AB mit a, die kleine Axe DE mit b, die Ordinate PM mit y und die Abscisse AP mit x, so ist die Abscisse BP = AB − AP = a − x, und das Rechteck BP . PA = (a − x) x = ax − x². So wird aus obiger Proportion

$$y^2 : ax - x^2 = b^2 : a^2.$$

Bezeichnet man ferner den Parameter mit p, so ist (nach §. 300)

$$a : b = b : p, \text{ also } b^2 = ap$$

daher

$$y^2 : ax - x^2 = ap : a^2 = p : a$$
$$ay^2 = apx - px^2$$

und

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a}$$

§. 310. Die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie die Rechtecke der zugehörigen Abscissen.

Bew. Es verhält sich

$$MP^2 : BP \,.\, PA = DE^2 : AB^2 \text{ (§. 309)}$$

und

$$NQ^2 : BQ \,.\, QA = DE^2 : AB^2 \text{ (§. 309)}$$

also

$$MP^2 : BP \,.\, PA = NQ^2 : BQ \,.\, QA \text{ (I. §. 104)}$$

§. 311. Umgekehrt: wenn sich in einer Linie die Quadrate der Ordinaten wie die Rechtecke aus den zugehörigen Abscissen verhalten, so ist dieselbe eine Ellipse.

Auch der Kreis ist eine Ellipse, welcher sich von der gewöhnlichen Ellipse nur dadurch unterscheidet, daß das Quadrat der Ordinate dem Rechteck der Abscissen gleich ist (folgt aus §. 116). Die beyden Brennpunkte fallen hier in einen, den Mittelpunkt, zusammen.

§. 312. Die Ordinate im Brennpunkte ist dem halben Parameter gleich.

Bew. Es ist $RG^2 : AG \,.\, GB = CD^2 : AC^2$ (§. 309)

Hier ist

$$AG.GB = (AC + CG)(AC - CG) = AC^2 - CG^2 = CD^2 \text{ (§. 306)}$$

daher

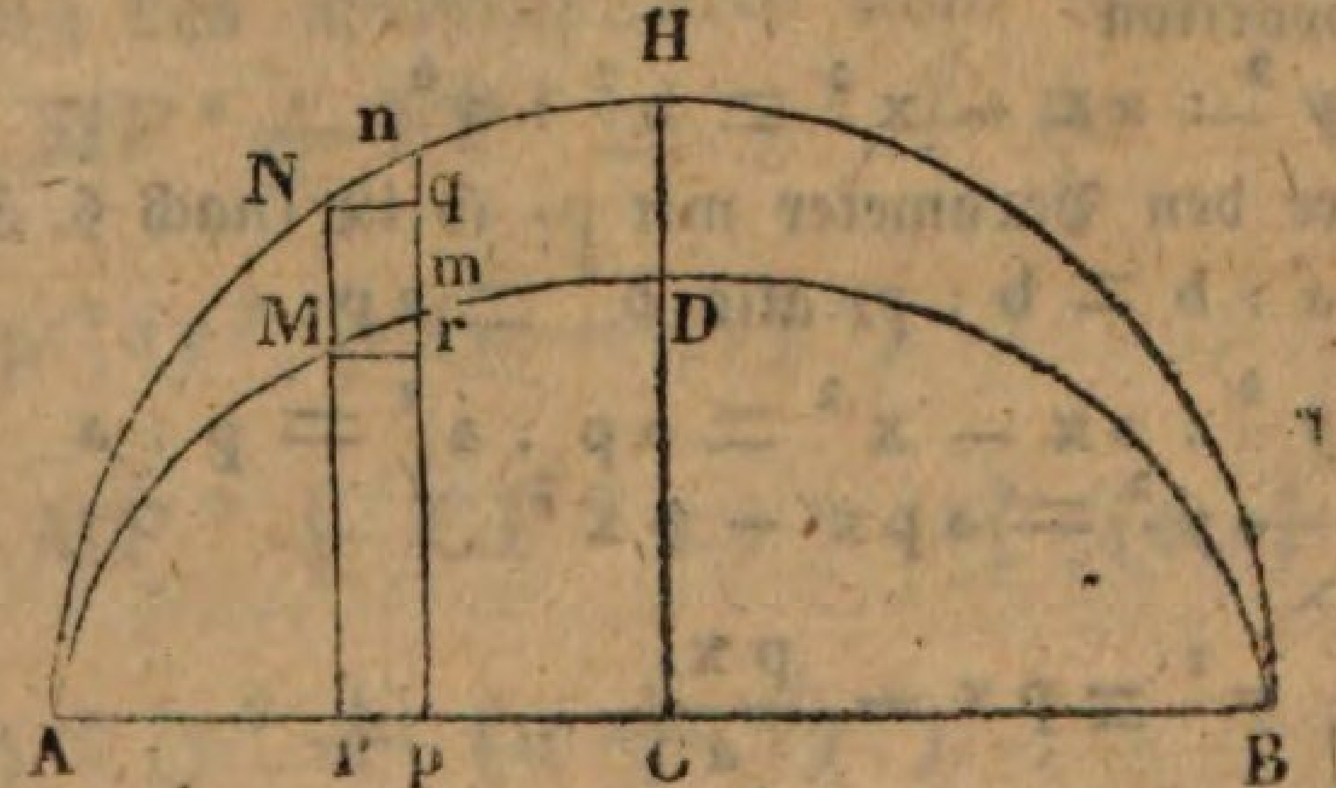
$$RG^2 : CD^2 = CD^2 : AC^2$$

folglich auch

$$RG : CD = CD : AC \text{ (I. §. 98)}$$

d. h. es ist RG die dritte Proportionallinie zur halben großen und halben kleinen Axe, also dem halben Parameter gleich (§. 300).

§. 313. Wenn man über der großen Axe der Ellipse einen Kreis beschreibt, so verhalten sich die Ordinaten der Ellipse, wie die zugehörigen Ordinaten des Kreises.



Bew. Es ist

$$MP^2 : mp^2 = AP \,.\, PB : Ap \,.\, pB \text{ (§. 310)}$$

und

$$NP^2 : np^2 = AP \,.\, PB : Ap \,.\, pB \text{ (§. 311)}$$

also

$$MP^2 : mp^2 = NP^2 : np^2 \text{ (I. §. 104)}$$

folglich

$$MP : mp = NP : np \text{ (I. §. 98)}.$$

§. 314. Die Ellipse verhält sich zum Kreise um die große Axe wie die kleine Axe zur großen.

Bew. Je näher np bey NP, desto mehr stimmen die Rechtecke NqpP und MrpP mit dem Kreisstücke NnpP und dem Ellipsenstücke MmpP überein, desto mehr verhält sich also

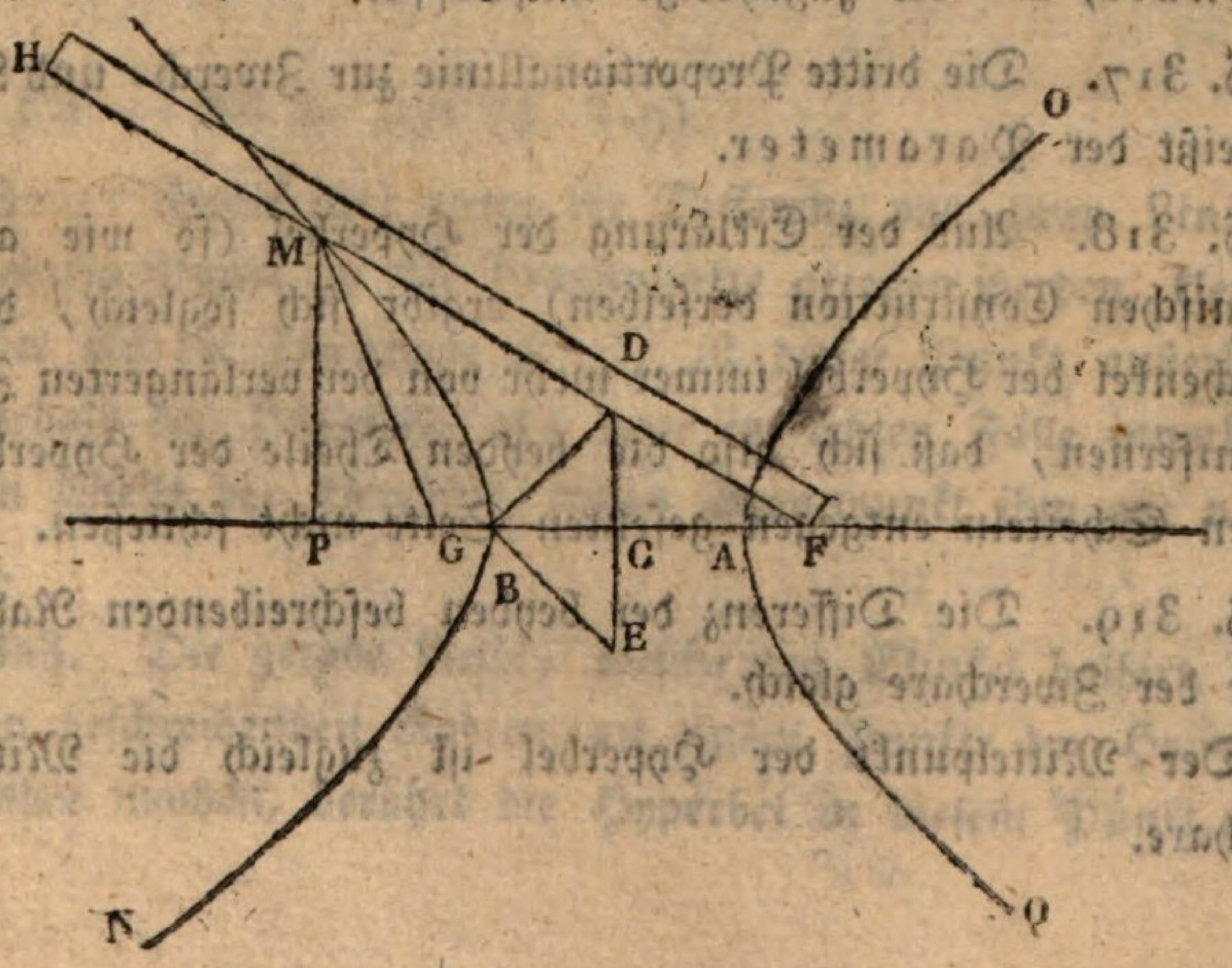
$$MmpP : NnpP = MP : NP = DC : HC$$

Man denke sich nun AB in unendlich viele gleiche Theile, und darnach die Ellipse und den Kreis in unendlich schmale Stücke getheilt; so verhält sich immer das Stück der Ellipse zum zugehörigen Stück des Kreises wie DC zu HC, also auch ihre Summen oder die halbe Ellipse zum Halbkreis, = DC : HC, folglich auch die Ellipse zum Kreis = 2 DC : 2 HC, d. i. wie die kleine Axe zur großen.

---

3. Hyperbel.

§. 315. Eine Linie, in welcher die Differenz der Entfernungen eines jeden Punktes von zweyen bestimmten Punkten gleich groß ist, heißt eine Hyperbel.



Die beyden Punkte G und F heißen die **Brennpunkte** der Hyperbel. Die geraden Linien MF und MG von einem Punkt der Hyperbel nach den beyden Brennpunkten heißen die **beschreibenden Radien.**

Da für dieselbe Größe der beyden beschreibenden Radien der Punkt M entweder näher bey G oder näher bey F liegen kann; so gehören zur Hyperbel immer zwey congruente Theile MBN und OAQ.

Anm. Um die Hyperbel mechanisch zu beschreiben, befestige man an das eine Ende H eines Lineals HF einen Faden HMG, der um so viel kürzer wie das Lineal ist, als die Differenz der beyden beschreibenden Radien MF und MG beträgt. Das andere Ende des Lineals bringe man in dem Brennpunkt F so an, daß es um F herum gedreht werden kann, und das andere Ende des Fadens befestige man in G. Wird nun das Stück HM des Fadens durch einen Stift M an dem Lineal angespannt, während das Lineal um den Punkt F gedreht wird, so beschreibt der Stift M den einen Theil der Hyperbel. Der andere congruente Theil der Hyperbel wird auf dieselbe Art beschrieben, wenn man das Lineal aus F wegnimmt und in G befestigt.

§. 316. Wenn man die beyden Brennpunkte durch eine gerade Linie mit einander verbindet, so heißen A und B die **Scheitel** der Hyperbel. Die Mitte C zwischen beyden Brennpunkten heißt der **Mittelpunkt** der Hyperbel. AB heißt die Zwerchaxe. Errichtet man durch C ein Perpendikel auf die Zwerchaxe, und nimmt man BD = BE = CG, so heißt DE die **Nebenaxe.**

Das Perpendikel MP auf die verlängerte Zwerchaxe heißt die **Ordinate**, BP die zugehörige **Abscisse.**

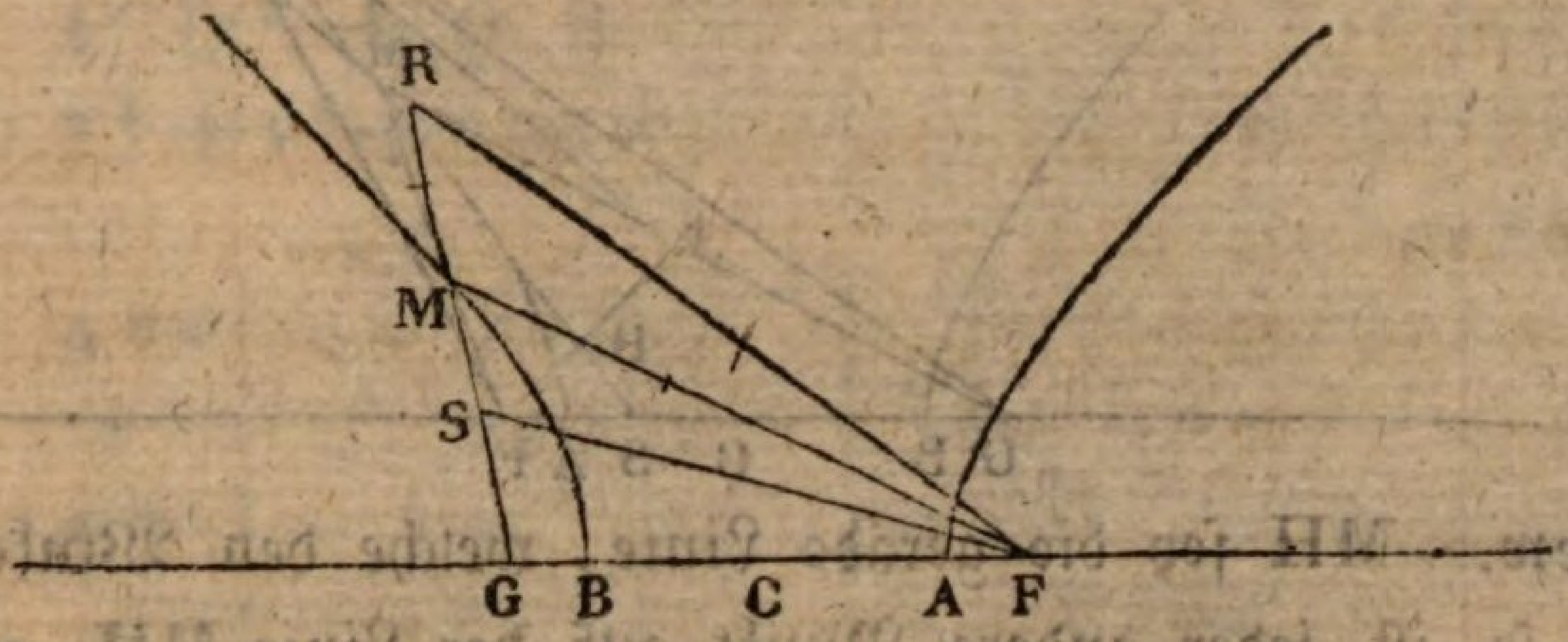
§. 317. Die dritte Proportionallinie zur Zwerch- und Nebenaxe heißt der **Parameter.**

§. 318. Aus der Erklärung der Hyperbel (so wie aus der mechanischen Construction derselben) ergibt sich sogleich, daß sich die Schenkel der Hyperbel immer mehr von der verlängerten Zwerchaxe entfernen, daß sich also die beyden Theile der Hyperbel auf der den Scheiteln entgegen gesetzten Seite nicht schließen.

§. 319. Die Differenz der beyden beschreibenden Radien ist immer der Zwerchaxe gleich.

Der Mittelpunkt der Hyperbel ist zugleich die Mitte der Zwerchaxe.

§. 320. Wenn man aus einem Punkt außerhalb der Hyperbel gerade Linien an die Brennpunkte zieht, so ist ihre Differenz kleiner als die Zwerchaxe.



Bew. Es ist FR < FM + MR (§. 53)

also

$$FR - RG < FM + MR - RG$$
$$FR - RG < FM + MR - MR - MG$$
$$FR - RG < FM - MG$$

oder

$$FR - RG < AB \text{ (§. 319)}.$$

§. 321. Für einen Punkt innerhalb der Hyperbel hingegen ist diese Differenz größer als die Zwerchaxe.

Bew. Es ist FS + SM > FM (§. 53)

also auch

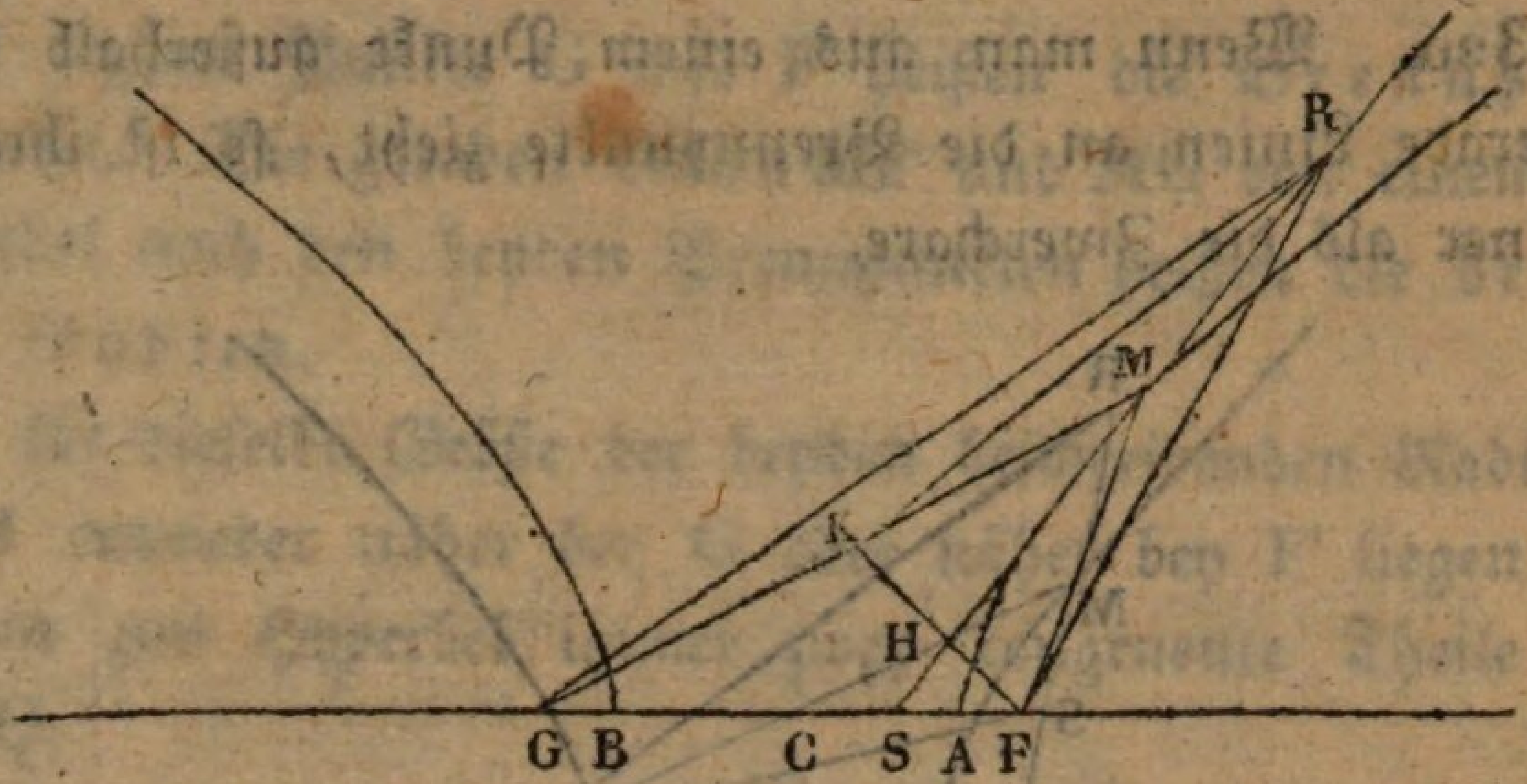
$$FS + SM - MG > FM - MG$$
$$FS + SM - SM - SG > FM - MG$$
$$FS - SG > FM - MG$$

oder

$$FS - SG > AB \text{ (§. 319)}.$$

§. 322. Umgekehrt: wenn die Differenz von zwey Linien, die aus einem Punkt an die Brennpunkte gezogen werden, kleiner oder größer als die Zwerchaxe ist; so ist dieser Punkt außerhalb oder innerhalb der Hyperbel, und zwar im letzten Falle innerhalb desjenigen Theils der Hyperbel, dessen Brennpunkt ihm am nächsten liegt.

§. 323. Die gerade Linie, welche den Winkel halbirt, den die beyden beschreibenden Radien an einem Punkte der Hyperbel mit einander machen, berührt die Hyperbel in diesem Punkt.



Bew. MH sey die gerade Linie, welche den Winkel FMG halbirt, so ist jeder andere Punkt auf der Linie MH, außer M, z. B. R, kein Punkt der Hyperbel. Denn, macht man MK = MF, so wird RK = KF. Nun ist

$$RG < RK + KG \text{ (§. 53)}$$

also auch

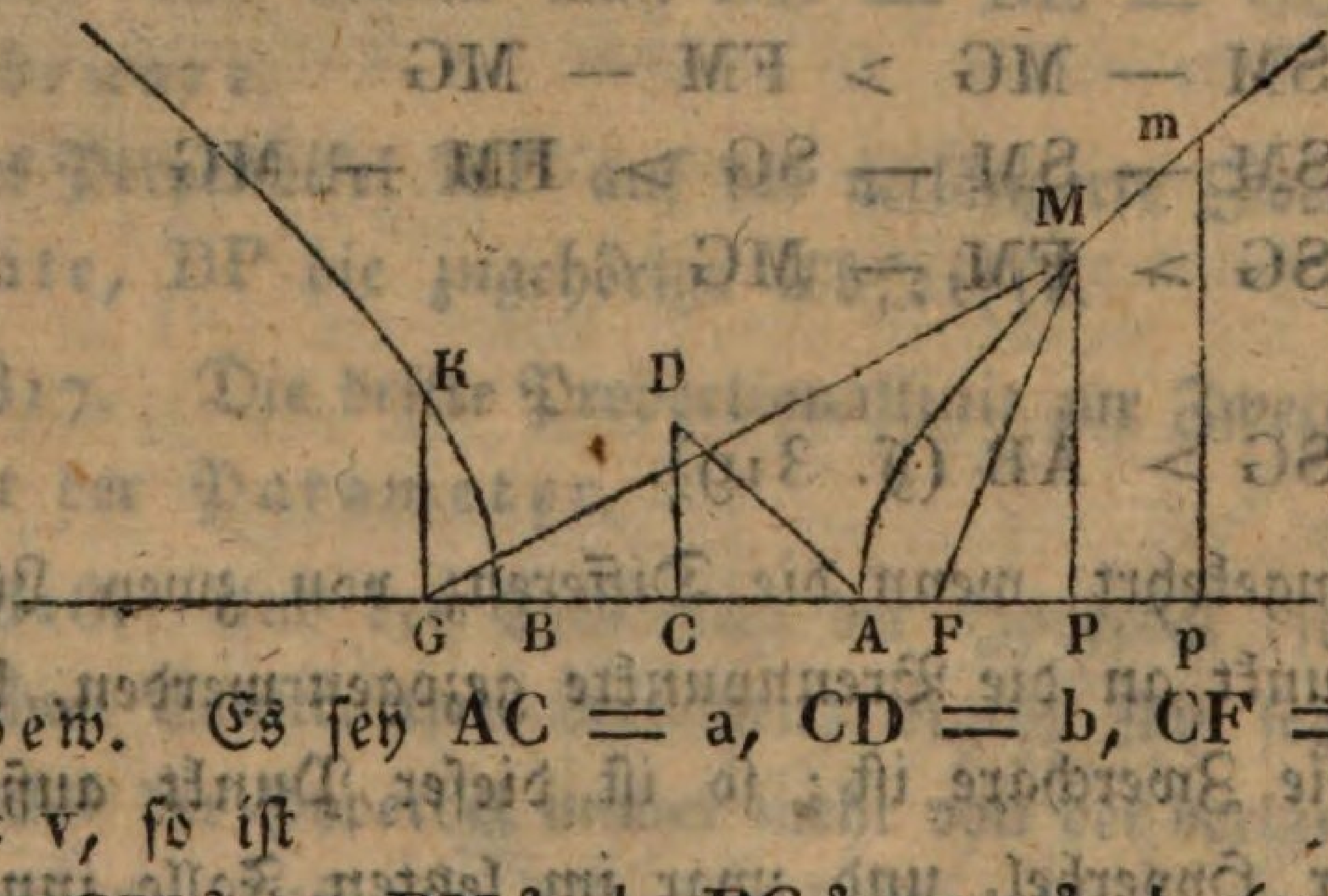
$$RG - RF < RK + KG - RK$$

oder

$$RG - RF < KG, \text{ d. i. } < GM - MK, \text{ d. i. }$$
$$< GM - MF, \text{ d. i. } < AB \text{ (§. 319)}$$

also ist R ein Punkt außerhalb der Hyperbel (§. 322).

§. 324. Das Quadrat der Ordinate verhält sich zum Rechteck der Absciße und der um die Absciße verlängerten Zwerchaxe wie das Quadrat der Nebenaxe zum Quadrat der Zwerchaxe.



Bew. Es sey AC = a, CD = b, CF = e, PM = y, CP = v, so ist

$$GM^2 = PM^2 + PG^2 = y^2 + (v + e)^2$$

also

$$GM = \sqrt{[y^2 + (v + e)^2]}$$

und

$$FM^2 = PM^2 + PF^2 = y^2 + (v - e)^2$$

also

$$FM = \sqrt{[y^2 + (v - e)^2]}$$

Da nun

$$GM - FM = AB$$ oder $$GM = AB + FM$$ ist, so erhält man

$$\sqrt{[y^2 + (v + e)^2]} = 2a + \sqrt{[y^2 + (v - e)^2]}$$

$$y^2 + v^2 + 2ev + e^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{[y^2 + (v - e)^2]} + y^2 + v^2 - 2ev + e^2$$

$$4ev - 4a^2 = 4a\sqrt{[y^2 + (v - e)^2]}$$

$$ev - a^2 = a\sqrt{[y^2 + (v - e)^2]}$$

$$e^2v^2 - 2eva^2 + a^4 = a^2[y^2 + v^2 - 2ev + e^2]$$

$$e^2v^2 - e^2a^2 + a^4 - a^2v^2 = a^2y^2$$

$$e^2(v^2 - a^2) - a^2(v^2 - a^2) = a^2y^2$$

$$(e^2 - a^2)(v^2 - a^2) = a^2y^2$$

woraus die Proportion

$$y^2 : v^2 - a^2 = e^2 - a^2 : a^2$$

Hier ist $y^2 = PM^2$

$$v^2 - a^2 = (v + a)(v - a) = BP \,.\, AP$$

= dem Rechteck der um die Abscisse verlängerten Zwerchaxe und der Abscisse,

$$e^2 - a^2 = CF^2 - AC^2 = AD^2 - AC^2 \;(\S.316) = CD^2$$

und

$$a^2 = AC^2$$

Wenn man diese Werthe in obiger Proportion substituirt, so erhält man

$$PM^2 : BP.AP = CD^2 : AC^2 = 4CD^2 : 4AC^2$$

$$= DE^2 : AB^2$$ (Fig. zu §. 315).

Anm. Bezeichnet man die Zwerchaxe AB mit a, die Nebenaxe DE mit b, die Ordinate PM mit y und die Abscisse AP mit x, so ist $BP = a + x$, und das Rechteck $BP \,.\, AP = (a + x)\,x = ax + x^2$; daher

$$y^2 : ax + x^2 = b^2 : a^2.$$

Bezeichnet man ferner den Parameter mit p, so ist (nach §. 317)

$$a : b = b : p, \text{ also } b^2 = ap$$

daher

$$y^2 : ax + x^2 = ap : a^2 = p : a$$

$$ay^2 = apx + px^2$$

und

$$y^2 = px + \frac{px^2}{a}$$

§. 325. Die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie die Rechtecke der Abscissen und der um die Abscissen verlängerten Zwerchaxe.

Bew. Es ist

$$MP^2 : BP \cdot AP = CD^2 : AC^2 \text{ (§. 324)}$$

und

$$mp^2 : Bp \cdot aP = CD^2 : AC^2 \text{ (§. 324)}$$

also

$$MP^2 : BP \cdot AP = mp^2 : Bp \cdot aP \text{ (I. §. 104).}$$

§. 326. Umgekehrt: wenn in einer Linie ein solches Verhältniß der Ordinaten Statt findet, so ist dieselbe eine Hyperbel.

§. 327. Die Ordinate im Brennpunkt ist dem halben Parameter gleich.

Bew. Es ist $GK^2 : BG \cdot GA = CD^2 : AC^2$ (§. 324)

Hier ist

$$BG \cdot GA = (CG - BC)(CG + CA)$$
$$= (CF - AC)(CF + AC) = CF^2 - AC^2$$
$$= AD^2 - AC^2 = CD^2$$

daher

$$GK^2 : CD^2 = CD^2 : AC^2$$

folglich auch

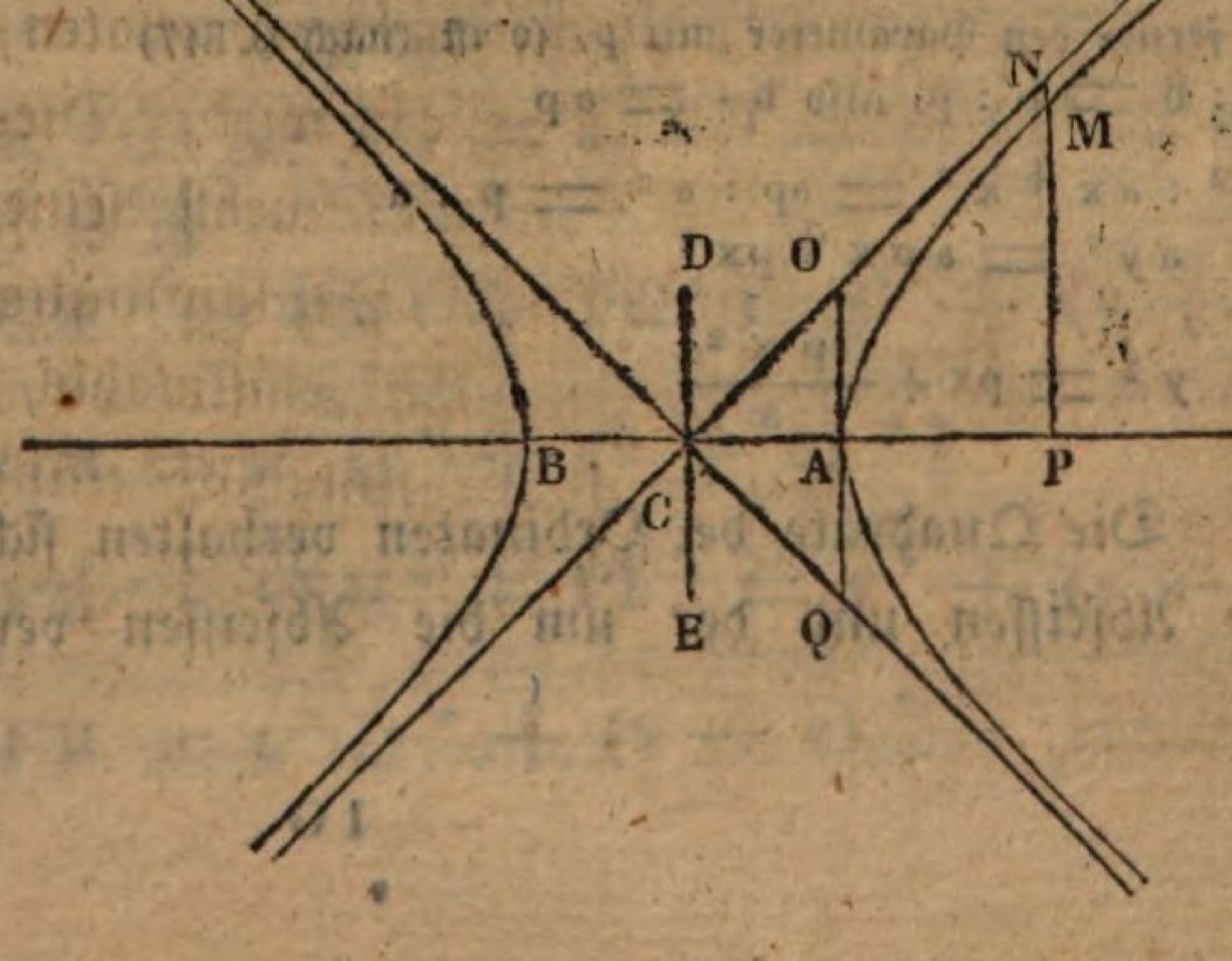
$$GK : CD = CD : AC \text{ (I. §. 98)}$$

oder

$$2\,GK : 2\,CD = 2\,CD : 2\,AC$$

d. h. die doppelte Ordinate im Brennpunkte ist die dritte Proportionallinie zur Zwerchaxe und Nebenaxe, d. h. dem Parameter gleich (§. 317).

§. 328. Wenn man im Scheitel der Hyperbel ein Perpendikel errichtet, auf dasselbe die halbe Nebenaxe trägt, und den Endpunkt dieses Perpendikels mit dem Mittelpunkt der Hyperbel durch eine gerade Linie verbindet; so trifft diese gerade Linie mit der Hyperbel nirgends zusammen, kommt derselben aber immer näher, je weiter die gerade Linie und die Hyperbel fortgesetzt werden.



Bew. 1. Man ziehe $\parallel$ AO die gerade Linie PN, welche die Hyperbel in M durchschneidet, so ist

$$PN : CP = AO : AC \text{ (§. 91)} = CD : AC$$

also

$$PN^2 : CP^2 = CD^2 : AC^2 \text{ (I. §. 98)}$$

ferner ist

$$PM^2 : AP \,.\, BP = CD^2 : AC^2 \text{ (§. 324)}$$

daher $PM^2 : AP \,.\, BP = PN^2 : CP^2$ (I. §. 104).

Hier ist aber $AP \,.\, BP = (CP - AC) \,.\, (CP + AC)$
$$= CP^2 - AC^2$$

Es verhält sich also

$$PM^2 : PN^2 = CP^2 - AC^2 : CP^2$$

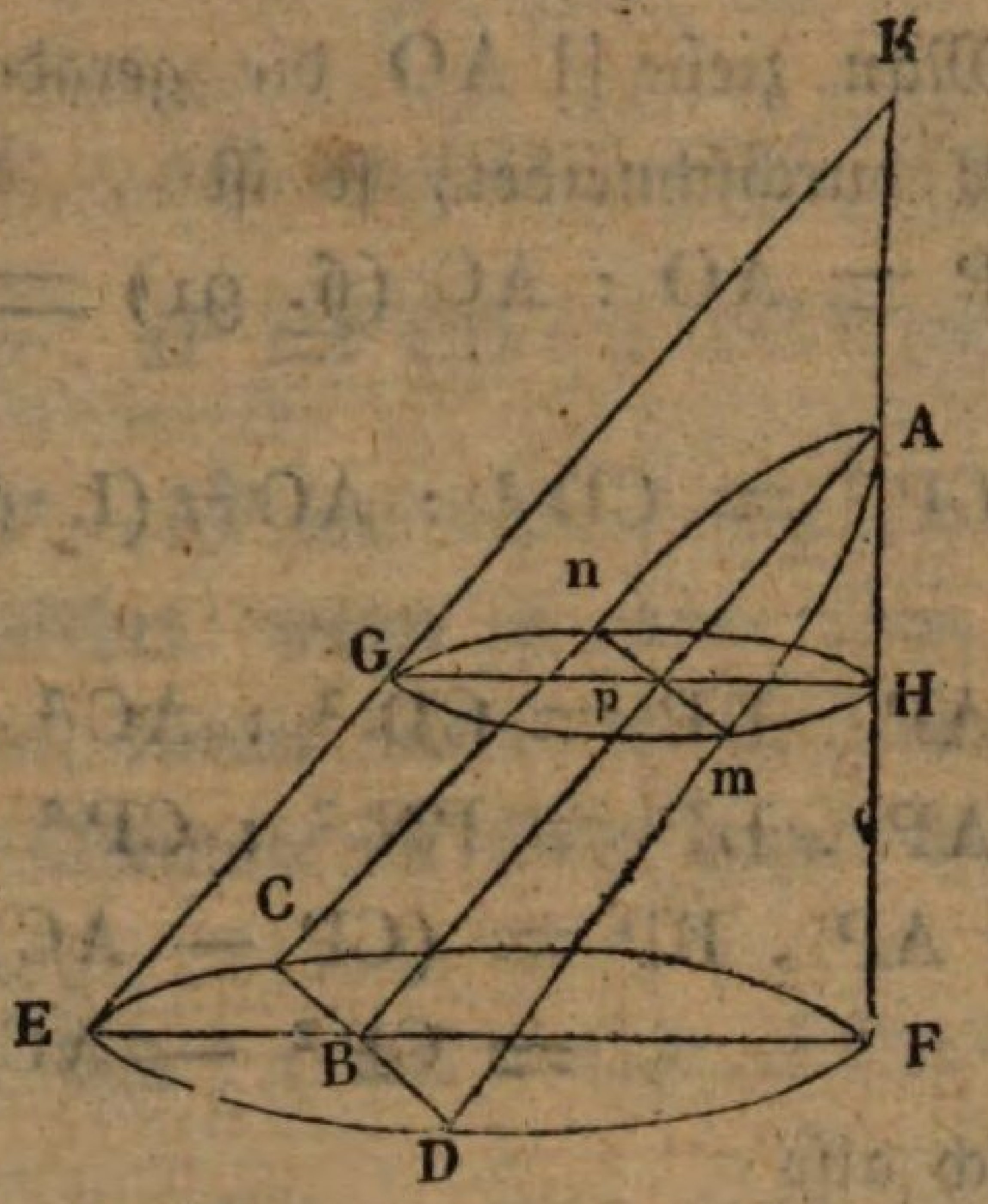
Da hier $CP^2 - AC^2$ immer kleiner als CP^2 ist, CP mag so groß genommen werden, als man will, so ist auch PM^2 immer $< PN^2$, also auch $PM < PN$, die gerade Linie trifft also nirgends mit der Hyperbel zusammen.

2. Es ist das Verhältniß $CP^2 - AC^2 : CP^2 = 1 - \frac{AC^2}{CP^2} : 1$ (I. §. 92). Da nun AC unveränderlich ist, und CP immer größer wird, so wird der Subtrahendus $\frac{AC^2}{CP^2}$ immer kleiner, also $1 - \frac{AC^2}{CP^2}$ nähert sich immer mehr dem Werth von 1, folglich auch PM^2 immer mehr dem Werth von PN^2, oder PM immer mehr dem Werth von PN; die Hyperbel kommt also der geraden Linie immer näher.

§. 329. Eine gerade Linie, welche sich einer krummen beständig nähert, aber doch nie mit derselben zusammen trifft, heißt eine Asymptote dieser krummen Linie.

---

§. 330. EKF sey dasjenige Dreyeck durch die Axe eines Kegels, das auf dessen Grundfläche EDFC senkrecht steht, CAD sey ein Schnitt durch den Kegel, senkrecht auf das Dreyeck EKF; so ist, wenn AB mit EK parallel ist, der Schnitt CAD eine Parabel.



Bew. GnHm sey ein Schnitt, parallel mit der Grundfläche ECFD, so ist derselbe ein Kreis (§. 176), welcher, wie sich leicht beweisen läßt, auf dem Δ EKF ebenfalls senkrecht steht. Der Schnitt CAD durchschneide diesen Kreis in mn und die Grundfläche des Kegels in CD, so stehen pm auf AB und GH, und BD auf AB und EF zugleich senkrecht (§. 152).

Im Kreis GmH ist

$$pm^2 = Gp \cdot pH \text{ (§. 116)}$$

und im Kreis EDF

$$BD^2 = EB \cdot BF \text{ (§. 116)}$$

also ist

$$pm^2 : BD^2 = Gp \cdot pH : EB \cdot BF$$

Da hier GH || EF (§. 147) und AB || EK ist, so ist GpBE ein Parallelogramm (§. 25), also Gp = EB (§. 56); daher

$$pm^2 : BD^2 = pH : BF \text{ (I. §. 92)}$$

Im Δ BAF ist aber

$$pH : BF = Ap : AB \text{ (§. 91)}$$

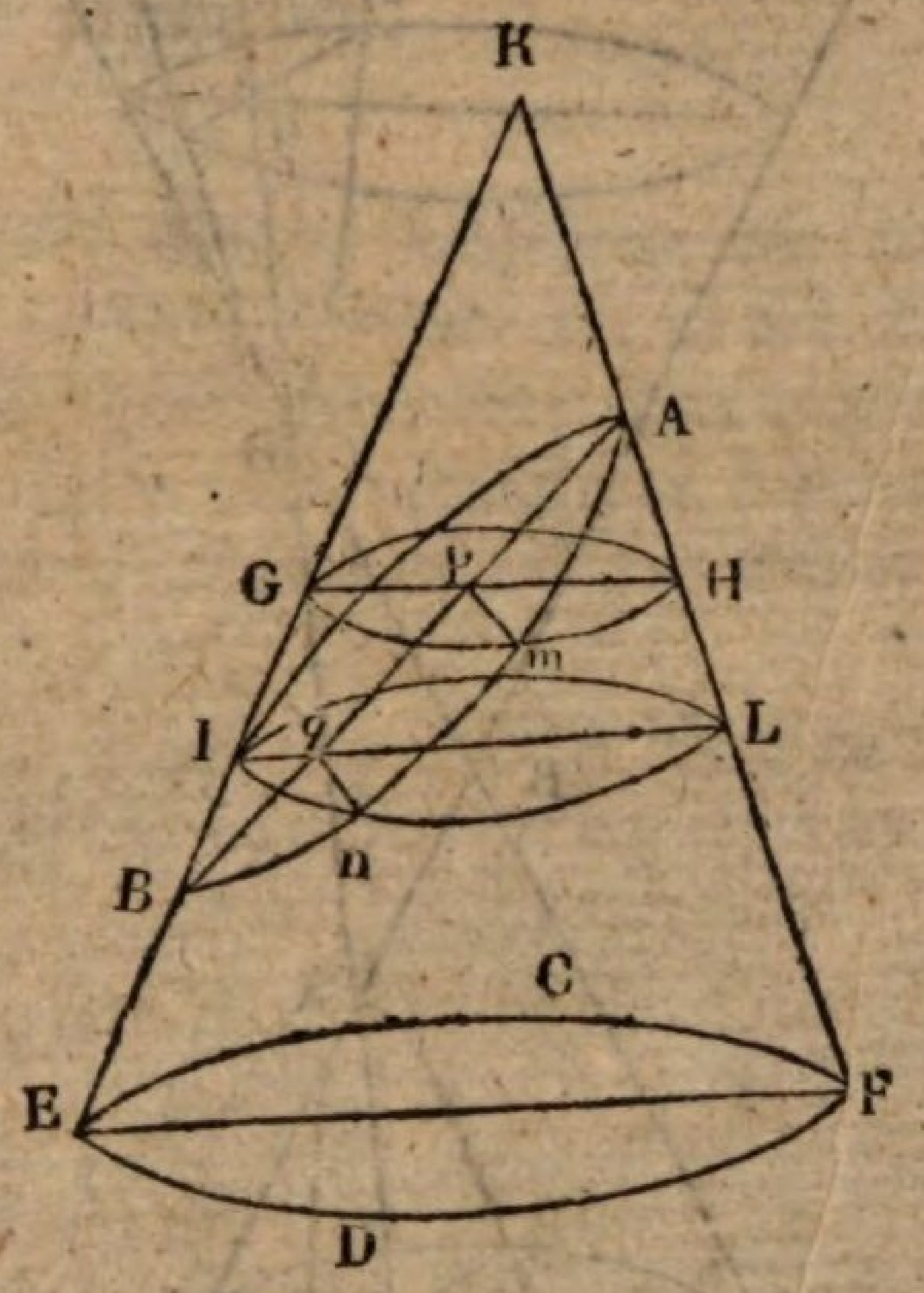
folglich ist auch

$$pm^2 : BD^2 = Ap : AB \text{ (I. §. 104)}$$

Es lassen sich pm und BD als Ordinaten ansehen, die zu den Abscissen Ap und AB gehören. Da sich hier die Quadrate der Ordinaten wie die Abscissen verhalten, so ist der Schnitt AmD eine Parabel (§. 292).

§. 331. Wenn, unter denselben Voraussetzungen wie im

vorigen §, die Durchschnittslinie AB mit einer Seite des Kegels nach unten convergirt, so ist der Schnitt AmnB eine Ellipse.



Bew. GmH und InL seyen Schnitte, parallel mit der Grundfläche, welche den Schnitt AmnB in pm und qn durchschneiden; so ist

$$pm^2 = Gp \cdot pH \text{ und } qn^2 = Iq \cdot qL \quad (§.\ 116)$$

also ist

$$pm^2 : qn^2 = Gp \cdot pH : Iq \cdot qL$$

Es ist aber

$$Gp : Iq = pB : qB$$

und

$$pH : qL = Ap : Aq \quad \Big\} \ §.\ 91.$$

also

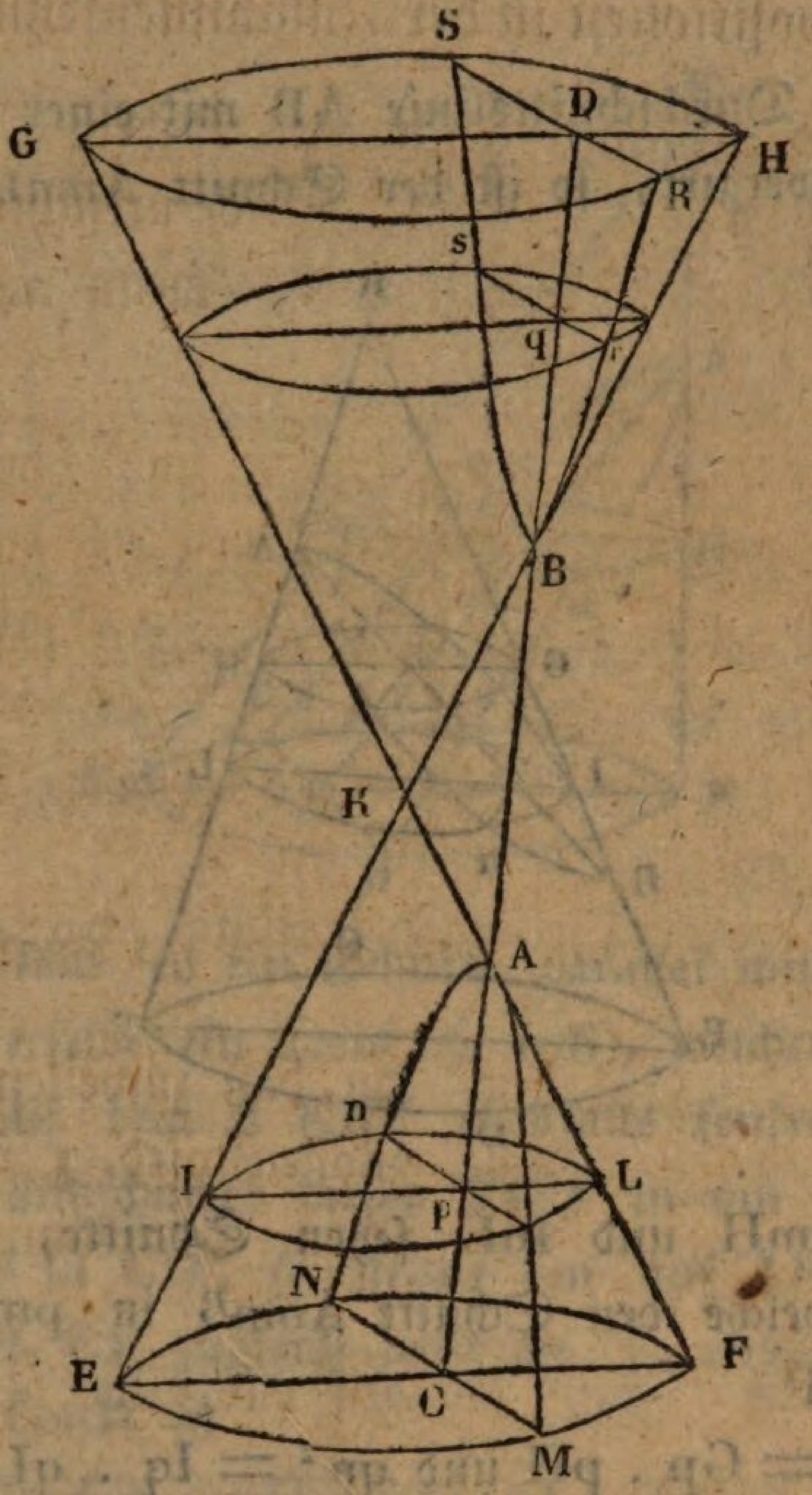
$$Gp \cdot pH : Iq \cdot qL = Ap \cdot pB : Aq \cdot qB \quad (I.\ §.\ 96)$$

folglich auch

$$pm^2 : qn^2 = Ap \cdot pB : Aq \cdot qB \quad (I.\ §.\ 104)$$

d. h. es verhalten sich in dem Schnitt AmnB die Quadrate der Ordinaten, wie die Rechtecke zwischen den zugehörigen Abschnitten der Linie AB. Es ist also AmnB eine Ellipse (§. 311).

§. 332. Wenn, unter den Voraussetzungen der §§. 330 und 331, die Durchschnittslinie AC von beyden Seiten des Kegels nach unten divergirt, so ist der Schnitt MAN eine Hyperbel.



Bew. Der Schnitt ImL sey der Grundfläche EMF parallel, und die Verlängerung von CA treffe die Verlängerung von EK in B; so ist

$$CM^2 = EC \cdot CF \text{ und } pm^2 = Ip \cdot pL \quad (\S.\ 116)$$

also

$$CM^2 : pm^2 = EC \cdot CF : Ip \cdot pL$$

Es ist aber

$$EC : Ip = CB : pB$$

und

$$CF : pL = AC : Ap$$

also

$$EC \cdot CF : Ip \cdot pL = AC \cdot CB : Ap \cdot pB \quad (I.\ \S.\ 96)$$

folglich auch

$$CM^2 : pm^2 = AC \cdot CB : Ap \cdot pB \quad (I.\ \S.\ 104)$$

Es ist also der Schnitt MAN eine Hyperbel und AB deren Zwerchaxe. — Verlängert man die Seiten des Kegels EKF über den Scheitel K und die Ebene des Schnitts über A hinaus, so entsteht ein Schnitt RBS, der mit dem Schnitt MAN congruent ist, und mit demselben zusammen genommen die Hyperbel ausmacht.

Bey H. L. Brönner in Frankfurt am Mayn sind nachstehende Verlagswerke erschienen.

Reise Sr. Durchlaucht des Prinzen Maximilian von Neuwied nach Brasilien in den Jahren 1815 — 1817. 2 Bände gr. 4. mit 22 Kupfern, 19 Vignetten und 3 Karten. Pränumerations-Preis auf Schreibpapier 4 Carolins oder 25 Rthlr. preuß. Cour. Auf Velin-Papier 6 Carolins oder 37 Rthlr. 12 gr. preuß. Cour. Dasselbe mit en gouache gemahlten Kupfern 36 Carolins oder 225 Rthlr. preuß. Cour.

Der sicherste Bürge für die Gediegenheit dieses kürzlich erschienenen Werks ist unstreitig die außerordentlich günstige Aufnahme, welche dasselbe im Publikum gefunden hat, und die, was in der That selten ist, von der ganzen Auflage des so zu sagen kaum fertig gewordenen 1ten Bandes nur noch eine geringe Anzahl von Exemplaren vorräthig gelassen hat. — Unter diesen Umständen wird ein neuer Abdruck desselben sehr bald nothwendig seyn und daher bleibt der frühere Pränumerations-Preis, der eigentlich jetzt zu Ende gehen sollte, bestehen, und man bezieht fortwährend gegen baare Einsendung des Betrags die noch vorräthigen Exemplare der gegenwärtigen Auflage mit den ersten Kupferabdrücken um den bisherigen Preis.

Passewan's Dr. Joh. Carl, Untersuchung über den Lebens-Magnetismus, die Magie und das Hellsehen. gr. 8.

Procli Diadochi et Olympioderi commentarii in Platonis Alcibiadem priorem. Nunc primum edidit pluriumque codd. mss. variet. lect. adjecit Prof. Fr. Creuzer, acced. Procli institutio theolog. ex Cod. mss. rectitute. 8 maj.

Radlof, ausführliche Schreibungslehre der teutschen Sprache für Denkende, durchaus neu bearbeitet. Nebst zwey Schrifttafeln. gr. 8. 4 fl. 48 kr. oder 2 Rthlr. 16 gr.

— — die Sprachen der Germanen in ihren sämmtlichen Mundarten dargestellt und erläutert, gr. 8. Druckpapier 3 fl. 36 kr. oder 2 Rthlr. Schreibpapier 4 fl. 36 kr. oder 2 Rthlr. 16 gr.

Reinhardsches Beicht- und Communionbuch, oder Betrachtungen für Communicanten aus den Schriften des seligen Oberhofpredigers Reinhard in Dresden gezogen von C. Friedr. Dietzsch, Stadtpfarrer in Oehringen; 2te verbesserte Aufl. 8.
Dasselbe auf Velin-Papier

Reinhard, Dr. F. V., Ansichten und Benutzungen der Sonn- und Festtäglichen Evangelien aus dessen sämmtlichen über diese Lehrtexte vorhandenen Predigten zusammengestellt und mit dessen Genehmigung herausgegeben von Ernst Zimmermann.
Auch unter dem Titel:
Homiletisches Handbuch für denkende Prediger, 3 Theile, 8. 1814. 7 fl. oder 4 Rthlr. 12 gr.

Heß, Dr. Ph. Ch., Anleitung zum Uebersetzen aus dem Deutschen in das Griechische, für Anfänger zur Einübung der Formenlehre, 8. 54 kr. oder 12 gr.

Auch unter dem Titel:

Uebungsbuch zum Uebersetzen aus dem Deutschen in das Griechische, von Heß und Vömel, 1s Bändchen.

Desselben 2r Band Uebungsbuch für höhere Klassen, 2te Auflage 1 fl. 12 kr. oder 16 gr.

Desselben 3r Band die griechische Synonymik als zum Ganzen gehöriges deutsch-griechisches und grammatikalisches Wörterbuch 2 fl. 24 kr. oder 1 Rthl. 8 gr.

Arndt, Chr. Gottl. v., Ueber den Ursprung und die verschiedenartige Verwandtschaft der europäischen Sprachen. Nach Anleitung des russischen allgemeinen vergl. Wörterbuchs. Herausgegeben von Dr. Joh. Ludw. Klüber, gr. 8. 3 fl. 36 kr. oder 2 Rthlr.

Böhms, A., gründliche Anleitung zur Meßkunst auf dem Felde, nebst zwey Anhängen von dem Nivelliren, und von der Markscheidekunst, 3te Auflage, größtentheils umgearbeitet von J. G. J. Cämmerer, mit 15 neugezeichneten Kupfertafeln, gr. 8. 4 fl. 30 kr. oder 3 Rthlr.

Hess, Dr. Ph. C., Observationes criticæ in Plutarchi Vitam Timoleontis. Præfixa est epistola ad virum celeberrimum Fridericum Creuzerum. maj. 8. 1 fl. 30 kr. oder 20 gr.

Krebs, Dr. J. P., Anleitung zum Lateinisch-Schreiben in Regeln und Beyspielen zur Uebung und Gebrauche der Jugend, 8. 2te Aufl. 2 fl. 6 kr. oder 1 Rthlr. 4 gr.

Minner, J. M., Italienisch-deutsche Gespräche für das gesellschaftliche Leben, nach Beauval, 8. 3 Theile 1 fl. 48 kr. oder 1 Rthlr.

— — Englisch-deutsche Gespräche für das gesellschaftliche Leben, nach Beauval, 8. 3 Theile 1 fl. 48 kr. oder 1 Rthlr.

— — Spanisch-deutsche Gespräche für das gesellschaftliche Leben, 8. 1 fl. 12 kr. oder 16 gr.

Strack, Dr. F. Eloah, oder Erhebungen des Herzens zu Gott in einer Reihe von Gesängen und metrischen Gebeten, 2te sehr vermehrte und verbesserte Auflage mit 1 Kupfer und Vignetten. 8. Auf Velinpap. geh. 3 fl. oder 1 Rthlr. 16 gr.

Dasselbe auf weiß Druckpapier 2 fl. oder 1 Rthlr. 4 gr.

Dasselbe auf ord. Papier ohne Kupfer 1 fl. 20 kr. oder 18 gr.

Voigt, Prof. F. S., Grundzüge einer Naturgeschichte als Geschichte der Entstehung und weitern Ausbildung der Naturkörper, gr. 8. mit 3 Kupfern. 5 fl. 24 kr. oder 3 Rthlr.

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Thilo, Ludwig

Lehrbuch der reinen Elementar-Mathematik Mit 79 im Text eingedruckten geometrischen Figuren

Frankfurt a. M. 1820

Math.u. 301 w
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594456-5